510
G 396
015299

CHRISTIAN GELLERT

aprenda Matemáticas en 15 días

SOLO PRESTAMO
FIN DE SEMANA

Un verdadero compendio matemático

para:
ESTUDIAR...
REPASAR...
RENDIR UN EXAMEN...
ENTENDER LIBROS TÉCNICOS DE RADIO Y TV

EDITORIAL NEO TECNICA

510
G 396

CHRISTIAN GELLERT
con la dirección técnica del
ING. FRANCISCO L. SINGER

"BIBLIOTECA Y CENTRO
DE DOCUMENTACION"
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANUS

APRENDA MATEMATICAS EN 15 DIAS

SOLO PRESTAMO
FIN DE SEMANA

<matematicas>

SEPTIMA EDICION

ACTUALIZADO CON: CALCULADORAS ELECTRONICAS

Biblioteca UNLa
015299

EDITORIAL NEO TECNICA

ARENALES 1258 BUENOS AIRES

Este libro se terminó de imprimir en
GRAFICA YANINA, R. Argentina 2686, V. Alsina, Bs. As.
el 12 de enero de 1988.

ISBN 950-43-1792-8

Queda hecho el depósito que marca la Ley Nº 11.723

Copyright © by FRANCISCO L. SINGER

IMPRESO EN LA ARGENTINA PRINTED IN ARGENTINA

Día 1

En este primer contacto con el lector debemos explicar cuál será el objetivo de este libro, es decir cuánto y cómo vamos a aprender de Matemáticas. Todos tenemos conciencia de que las Matemáticas se estudian en la escuela primaria, bajo las denominaciones de Aritmética y Geometría y que luego se siguen estudiando en la escuela secundaria y que todo eso lleva varios años. Los objetivos son claros y definidos, pues en el primer caso se enseña a realizar operaciones comunes como sumar, restar, multiplicar y dividir por una parte, y a calcular longitudes, áreas y volúmenes por la otra. En la escuela secundaria se estudian las Matemáticas como una ejercitación mental y una aplicación del razonamiento. En algunos tipos de enseñanza secundaria especializada, como la industrial y comercial, se va más allá, ya que debe lograrse una aptitud operativa para resolver problemas prácticos.

Nuestro objetivo es diferente, pues no pretendemos reemplazar la enseñanza metodizada y extensa que hemos mencionado, sino brindar al lector la posibilidad de que pueda leer, interpretar y aprovechar los libros técnicos que deja de lado por el hecho de que al ojearlos ve que tienen fórmulas. Y ahí está el problema importante que debemos resolver; enseñar el mínimo indispensable para que el lector pueda leer libros de mayor nivel que el que hasta ahora ha encarado; y debe ser un mínimo por el hecho de que hemos limitado el tiempo que dedicaremos a esa tarea; y puede ser el mínimo porque para esa finalidad no necesitamos conocimientos profundos sino adquirir las suficientes nociones generales para entender y aplicar las fórmulas, tablas y gráficos que aparecen en todos los libros técnicos.

Aclarada la cuestión fundamental se hace evidente que no debe acudirse a este libro en busca de un texto para estudios secundarios, pues será incompleto; que hay una cantidad grande de asuntos que no se estudiarán mientras ellos no sean necesarios para cumplir nuestro objetivo; y que no enseñaremos Matemáticas sino a usar los procedimientos matemáticos que hemos considerado indispensables. Y ahora sí podemos comenzar nuestra tarea.

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LA ARITMETICA

Desde los albores de la civilización el hombre ha fijado la idea de cantidad y forzosamente hubo de buscar representarla en alguna forma, para hacerse entender por sus semejantes. Ya los caldeos empleaban piedras colocadas en sucesión para contar. Posteriormente se utilizó el sistema de hacer trazos en la tierra o en las paredes, hasta que las civilizaciones romana, egipcia y árabe introdujeron los números que simbolizaban distintas cantidades sin obligar a contar por unidades simples.

En la actualidad sólo subsisten dos familias de números, una de las cuales está cayendo en completo desuso: la arábiga y la romana. Esta última se emplea aún para efectos decorativos, para diferenciar cantidades notables y más que nada por una costumbre difícil de desarraigar.

En los procedimientos matemáticos sólo se emplean los números arábigos, de manera que dejaremos los romanos de lado. Y aquí cabe destacar que en el desarrollo de todo el libro dejaremos de lado muchas cosas, todas ellas no necesarias para el objetivo que nos hemos trazado y que está fijado en el encabezamiento que sirve de prólogo. Como las cantidades se expresan con números, aclararemos algunas cuestiones fundamentales referentes a las mismas.

1. — Clasificación de cantidades

Hemos dicho que con números se expresa la idea de cantidad, de manera que el primer número de la serie indicará siempre una sola unidad en cada especie. El número 1 pues, representa y se llama *la unidad*.

Los números no siempre representan una cantidad determinada de cosas, pues pueden referirse a sólo una parte de un todo. Por ejemplo, 0,10 representa una décima parte, es decir que no llega a ser la unidad completa. Esta cifra también puede escribirse como 1/10 y significa lo mismo que antes.

Es decir que se pueden clasificar los números o cantidades en dos grandes grupos: enteros y fraccionarios; aunque se presenta frecuentemente el caso de cantidades que engloban un número entero y uno fraccionario, como ser 2 ½ que significa que se trata de una cantidad mayor de 2 unidades y menor de 3.

Tenemos, en consecuencia, que las cantidades pueden ser representadas por números enteros, fraccionarios y mixtos. Estos dos últimos tipos de números tienen dos sistemas de representación o escritura, llamados *decimales* y *quebrados*.

Por ejemplo si se tiene una cantidad que equivale en números a la cuarta parte de un entero, ello puede escribirse en las dos formas siguientes:

$$\text{una cuarta parte} \begin{cases} \text{decimal} & 0{,}25 \\ \text{quebrado} & \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Siendo indistintas ambas representaciones en cuanto al significado numérico, pero diferentes en cuanto deban asociarse a cantidades similares.

Asimismo los números mixtos pueden ser escritos en forma de decimales o quebrados. Por ejemplo, tres unidades más tres cuartas partes de una unidad puede ser escrito en las dos maneras siguientes:

$$\text{tres y tres cuartos} \begin{cases} \text{decimal} & 3{,}75 \\ \text{quebrado} & 3\,\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Hay casos particulares que pueden ser destacados por ser interesantes. Es el caso, por ejemplo, de las fracciones periódicas entre los decimales y las aparentes e impropias entre los quebrados.

Se llama fracción decimal periódica a aquella que resulta de una operación sin tener un fin exacto. Está formada por una sucesión regular o periódica de números como ser:

0,6666 ; 0,83636 ; 0.459459

Con referencia a las fracciones quebradas, hay dos casos particulares muy comunes que conviene destacar. Cuando una fracción quebrada no tiene objeto de ser escrita en esa forma por tener una equivalencia exacta en números enteros, se llama *aparente*. Al ocuparnos de las operaciones con quebrados veremos esto detalladamente.

2. — Operaciones fundamentales

La Aritmética, ya sea elemental o superior, tiene cuatro operaciones fundamentales con las que se pueden hacer muchas combinaciones, como la regla de tres, los problemas de quebrados, etc. Esas operaciones fundamentales son: suma, resta, multiplicación y división.

Hay además operaciones accesorias o derivadas, como la potenciación, radicación, etc. Estas últimas no carecen de importancia, pues su empleo es casi tan frecuente en la Técnica como las otras.

Suma

Para sumar dos cantidades la operación se indica escribiéndose una a continuación de la otra, interponiéndole el signo *mas* (+) y posponiendo el signo *igual* (=) antes del resultado; así por ejemplo:

$$45 + 25 = 70$$

Si las cantidades a sumar son más de dos, se procede de idéntica manera, colocando el signo de suma entre cada dos sumandos; por ejemplo:

$$10 + 15 + 5 + 20 = 50$$

La utilización de estos símbolos y manera de escribir las cantidades es necesaria para habituarse a hacer las cosas ordenadamente y no tener dificultades cuando se llegue al Algebra, donde la ubicación de las cifras y el símbolo adquiere una importancia extraordinaria.

El orden de los sumandos no altera el resultado, como es lógico, pero lo evidenciaremos con un ejemplo, tomando las mismas cantidades anteriores:

$$20 + 15 + 10 + 5 = 50$$

Resta

Para restar dos cantidades, se indica en forma similar a la operación de suma, pero el signo a interponer es el *menos* (–). Así, por ejemplo:

$$25 - 15 = 10$$

Utilizándose, como se ve, también en este caso el signo *igual* (=) para dar el resultado. El número mayor se llama *minuendo* y en inferior *sustraendo;* el resultado se denomina *diferencia*.

Si las cantidades a restar son más de dos hay que proceder por partes, restando sucesivamente después de obtener cada resultado parcial. Así, la operación de resta:

$$50 - 25 - 15 - 5 = 5$$

ha sido resuelta en la siguiente forma:

$$50 - 25 = 25$$
$$25 - 15 = 10$$
$$10 - \ \ 5 = \ \ 5$$

Como se ve, para indicar la operación se hace en la forma más simple, escribiendo todas las cantidades en un mismo renglón, pero para hacer la cuenta se procede por partes, restando la segunda cantidad a la primera, la tercera al resultado de la primera resta y así secesivamente.

Igualmente que en el caso anterior el resultado no altera si se invierte el orden de los términos, siempre que no sea el primero, es decir, el mayor. Así, en la resta anterior, puede cambiarse la colocación de cualquiera de las cantidades 25, 15, y 5, pero no la de 50. Por ejemplo:

$$50 - 15 - 5 - 25 = 5$$

como es fácil comprobar.

Multiplicación

Para multiplicar dos cantidades, se escriben una a continuación de la otra, interponiendo el signo: *por* (×); a continuación se coloca el signo *igual* (=) y se pone el resultado de la cuenta. Por ejemplo:

$$15 \times 4 = 60$$

El primer número se llama *multiplicando* y el segundo *multiplicador;* el resultado, *producto*. La cuenta se puede hacer en la forma conocida y que se aprende en la escuela primaria, pero la forma de escribir la operación es la que hemos indicado, y así aparecerá en lo sucesivo.

Si son más de dos las cantidades a multiplicar, se procede de idéntica manera escribiéndolas en fila y colocando entre cada dos de ellas el signo *por* (×). Así, por ejemplo:

$$25 \times 4 \times 17 \times 2 = 3400$$

Siendo evidente que para hacer las cuentas primero se ha multiplicado 25 por 4; luego el resultado de esa operación, que es 100, se ha multiplicado por 17, resultando 1700; y finalmente esta cifra fue multiplicada por el último de la serie, por 2, obteniéndose el resultado final de 3400.

El orden de los factores, así llamadas cada una de las cantidades que se deben multiplicar, no altera el producto, como es fácil ver en el ejemplo anterior; en efecto:

$$17 \times 4 \times 2 \times 25 = 3400$$

División

Para dividir dos cantidades la operación se indica colocando las cantidades una encima de la otra, separadas por una raya horizontal seguida del signo *igual* (=). Por ejemplo, para dividir 80 por 20, se escribe así:

$$\frac{80}{20} = 4$$

De modo que el dividendo se coloca sobre la raya y el divisor debajo. El resultado se escribe en la misma línea de la raya y se llama cociente.

En la división no se puede decir que el orden de las cantidades no altera el resultado, pues si en el ejemplo anterior invertimos el dividendo y el divisor, se obtiene un resultado muy distinto:

$$\frac{20}{80} = 0{,}25$$

El dividendo, o cantidad superior se llama también *numerador*, y el divisor o cantidad inferior, se llama *denominador*. No extrañe al lector si en adelante se usa una u otra designación, pues ambas son corrientes en Matemáticas.

3. — Operaciones con números decimales

Para operar con números decimales ya sean fraccionarios o enteros con fracción decimal, se procede en forma similar a lo visto para números enteros, pero con ciertas reglas fijas que deben respetarse estrictamente. A fin de

destacar la aplicación de tales reglas ilustramos algunos ejemplos.

Suma de decimales

La operación de sumar números decimales o mixtos puede hacerse de idéntica manera que con los enteros, colocándolos en una misma línea y separándolos con el signo (+), pero a fin de evitar confusiones resulta más conveniente colocarlos en columna. Y aquí viene la regla de la suma de números decimales:

Para sumar números compuestos por fracción decimal o enteros con fracción, se los debe colocar de modo tal que la coma quede sobre una misma línea vertical, y en el mismo lugar quedará en el resultado. Así por ejemplo:

$$
\begin{array}{rr}
 & 174,25 \\
 & 3,264604 \\
+ & 0,0168 \\
 & 2851,03 \\
\hline
 & 3028,561404
\end{array}
$$

Donde se ve que la suma se hace en la forma habitual salvo en el detalle de la alineación de todos los sumandos sobre una misma línea vertical con respecto a la coma.

Resta de decimales

Para restar fracciones decimales o enteros con fracción, se sigue la misma regla de la suma, es decir que se alinean las cantidades a restar sobre una misma línea vertical con respecto a las comas. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{rr}
- & 1047,1568 \\
 & 275,23 \\
\hline
 & 771,9268
\end{array}
$$

Y si se trata de una resta entre enteros y decimales, se procederá de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rr}
- & 25 \\
 & 0,042 \\
\hline
 & 24,958
\end{array}
$$

Aunque muchas veces se colocan los ceros que faltan por razones de comodidad. Así, por ejemplo, la misma resta anterior puede escribirse así:

$$
\begin{array}{rr}
- & 25,000 \\
 & 0,042 \\
\hline
 & 24,958
\end{array}
$$

Que tiene la ventaja de evitar errores por mala apreciación del lugar en que se coloca cada cifra.

Multiplicación de decimales

Para realizar una operación de multiplicar dos cantidades que tengan decimales se procede de idéntica manera que si fueran enteros, no interesando la colocación de las mismas en el orden de los factores para multiplicar, pero se aplica la regla siguiente:

El número de cifras decimales del resultado es igual a la suma de las cifras decimales del multiplicando y del multiplicador. De modo que para colocar la coma en el resultado o producto basta contar cuántos decimales tienen en conjunto ambos factores. Así, por ejemplo:

$$
\begin{array}{rl}
45,23 & \text{(2 decimales)} \\
3,652 & \text{(3 decimales)} \\
\hline
9046 & \\
22615 & \\
27138 & \\
13569 & \\
\hline
165,17996 & \text{(5 decimales)}
\end{array}
$$

Y en el caso de que se tratara de cifras formadas por fracciones decimales, se procedería de idéntica manera. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{rl}
0,476 & \text{(3 decimales)} \\
0,0012 & \text{(4 decimales)} \\
\hline
952 & \\
476 & \\
\hline
0,0005712 & \text{(7 decimales)}
\end{array}
$$

Notándose de inmediato que hubo necesidad de anteponer ceros al resultado para poder completar la cantidad de cifras decimales que resultaba de sumar las que tenían los factores.

División de decimales

Para efectuar operaciones de dividir cantidades decimales o enteros con fracción se procede de acuerdo a las reglas de la división, pero previamente hay que igualar mediante agregados de ceros las cantidades de cifras decimales del dividendo y del divisor. Hecho esto, se puede anular la coma en ambas partes y proceder como si se tratara de cantidades enteras.

Por ejemplo sea la división:

$$\frac{427{,}32}{15{,}173}$$

Donde se ve que el dividendo tiene dos decimales y el divisor tres; por ello debe agregarse un cero al dividendo y anular las comas, quedando entonces la división:

$$\frac{427320}{15173}$$

Que se realiza en la forma indicada para números enteros. Hay casos que pueden suscitar dudas por la forma como se presentan. Por ejemplo sea la siguiente división:

$$\frac{475}{0{,}0026}$$

Que para ser resuelta deben igualarse las cifras decimales del dividendo y divisor; como el dividendo no tiene ninguna, se le agregan 4 ceros y luego se elimina la coma:

$$\frac{4750000}{26}$$

Haciéndose la operación de la manera habitual. En los ejemplos propuestos no se ha tenido en cuenta el caso de obtener decimales en el cociente, porque ello es independiente de que las cantidades a dividir sean o no decimales. Si se presenta el caso de requerir un cociente con decimales, se coloca la coma en el mismo cuando se terminan las cifras enteras en el dividendo y se van agregando tantos ceros en la operación como cifras decimales se deseen obtener. Veamos un ejemplo:

```
357    | 23
127    |15,52
 120
  050
   04
```

Donde se ve que se ha agregado dos ceros en la tercera y cuarta línea de la operación respectivamente para obtener dos cifras decimales en el cociente.

4. — Operaciones accesorias importantes

Para resolver los problemas de la vida diaria, hacer cuentas de gastos, averiguar el saldo de una venta, etc., basta conocer bien las cuatro operaciones fundamentales. Pero la práctica exige el conocimiento de otras operaciones, así como la potenciación, radicación, resolución de quebrados y otras dentro de la Aritmética.

Potenciación

Se llama elevar un número a una potencia dada, a la operación que se realiza multiplicando ese número tantas veces por sí mismo como lo indique la cifra de la potencia. Así, para elevar el número 5 a la potencia 2, se multiplica 5 por sí mismo, es decir:

$$5 \times 5 = 25$$

Obsérvese que al multiplicar 5 por 5 contamos el 5 dos veces. Así ocurre siempre en la potenciación: se cuenta el número de veces que se escribe el número.

Así, en el ejemplo anterior, para decir que al número cinco lo debemos multiplicar por sí mismo, escribimos el número cinco y le colocamos un pequeño número dos encima, un poco adelante; la potencia 2 de un número se llama el cuadrado de ese número. Así el cuadrado de 5 será igual a 5 × 5, es decir:

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

De modo pues, que para indicar que una cantidad debe multiplicarse varias veces por sí misma, operación que se llama potenciación, lo indicamos escribiendo la cantidad a elevar, colocándole el número de veces que se debe multiplicar arriba con un número más pequeño llamado *índice*, haciendo la operación respectiva y poniendo el resultado después del signo *igual* (=). Veamos un ejemplo; se debe multiplicar el número 7 cuatro veces por sí mismo, operación que se podría indicar así:

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$$

Pero hemos dicho que se indica de otra manera, es decir así:

$$7^4 = 2401$$

Radicación

La operación inversa de la potenciación es la radicación. Extraer la raíz de un número es encontrar otro, que multiplicado tantas veces por sí mismo como lo indique el número o índice de la raíz, dé por resultado el primer número. El índice de la raíz se menciona como una cantidad ordinal, es decir, se habla de raíz

cuadrada o segunda, raíz cúbica o tercera, raíz cuarta, quinta, décima, etc.

Ya se ve que la operación será sumamente complicada, sobre todo si se trata de índices elevados, porque para la raíz cuadrada y la cúbica hay métodos más o menos simples de la Aritmética, pero para índices mayores hay que recurrir a otros caminos. Veamos un ejemplo muy simple para orientarnos; supongamos que se quiere extraer la raíz de orden o índice 2, es decir, la raíz cuadrada de 25. Esa operación la indicamos así:

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

Puesto que multiplicando 5 por sí mismo resulta 25. Luego 5 es la raíz cuadrada de 25. Como se ve, el número al que se le quiere extraer la raíz se coloca dentro de un signo especial, llamado *radical*, el índice de la raíz se coloca en la parte superior de ese signo y el resultado se pone después del signo igual (=). En la práctica, cuando se trata de raíz cuadrada que es el caso mínimo, pues no hay índices menores enteros, se suprime dicho índice escribiendo así:

$$\sqrt{25} = 5$$

5. — Extracción de la raíz cuadrada

Las operaciones de radicación con índices 2 y 3 pueden resolverse por aritmética simple, pero las de índices mayores o fraccionarios se prefiere efectuarlas por otros métodos, como son los que emplean logaritmos.

Supongamos que se debe extraer la raíz cuadrada de la cantidad 4583.

Comenzaremos el procedimiento. Primero se divide la cantidad en pares de cifras comenzando desde la derecha. Si el número tuviera una coma y decimales, se comienza desde la coma, poniendo un punto cada dos cifras; la última división, puede dejar un sólo número o dos, pero esto no interesa; se deja como resulte.

Tomamos el primer período de cifras, que en nuestro caso es 45, y buscamos cuál número, comprendido entre 1 y 9 tiene su cuadrado, es decir, su producto por sí mismo más cerca de 45. Así, por ejemplo, se buscará el cuadrado de 3 que es 9, el de 4 que es 16, el de 7 que es 49, etc.; en nuestro caso notamos que el cuadrado de 6 es 36 y el de 7 es 49, que sobrepasa; luego nos quedamos con el de 6, escribimos ese número arriba a la derecha y verificamos restando de 45 el cuadrado de 6 = 36:

√ 45 . 83	6
36	6 × 6 = 36
9	

El resultado de la resta ha sido 9. El número 6 pertenece definitivamente al resultado, y a él se irán agregando los restantes que aparezcan. Se baja ahora el segundo período, es decir, el 83, colocándolo a continuación del 9. Se toma la cifra superior completa, por ahora el 6 solo, se la multiplica por 2 y se escribe ese resultado. A la nueva cifra hay que agregarle un número, comprendido entre 1 y 9, tal que multiplicando por ese mismo número la cantidad sea menor o igual a 983, cifra que tenemos a la izquierda. Probamos con siete; agregamos, el 7 al 12; queda 127, y multiplicamos por 7; resulta 889 que es menor que 983; además, el resultado 94 de la resta es menor que 127, lo que nos dice que está bien, de modo que se puede pasar la cifra 889 debajo del 983 para restar, obteniéndose un saldo de 94.

Con esto, el número 7 queda incorporado al resultado, de modo que lo escribimos a continuación del 6 que teníamos arriba. Como la cantidad 4583 la hemos utilizado toda, agregamos dos ceros para extraer decimales; así al 94 le colocamos dos ceros. Tomamos la cifra de la derecha, el 67, y lo multiplicamos por 2, resultando 134. Ese número lo escribimos debajo y le agregamos una cifra por la que también debe multiplicarse todo; probamos agregando un 6 y multiplicando por 6; el número 134 con el 6 da 1346 y multiplicando por 6 resulta 8076 que es menor que 9400, cifra que tenemos a la izquierda, de modo que se puede restar y el resto 1324 es menor que 1346, lo que está bien:

√ 45 . 83,00	67,6
36	6 × 6 = 36
983	6 × 2 = 12
889	127 × 7 = 889
9400	67 × 2 = 134
8076	1346 × 6 = 8076
1324	

Y el número 6 queda incorporado al resultado, pero no debe olvidarse que a continua-

ción de 67 hay que poner una coma, porque hemos agregado los dos ceros a 4583 previa colocación de la coma.

A título informativo conviene especificar la forma de proceder cuando se trata de extraer la raíz cuadrada a cantidades decimales. El procedimiento tiene su cuestión fundamental en la forma de considerar los ceros. Hay que partir de la coma hacia la derecha y agrupar períodos de dos cifras, sean o no ceros.

Por ejemplo, veamos cómo se extrae la raíz cuadrada del número 0,00054. En primer lugar se agrupan las cifras:

$$\sqrt{0,00.05.40}$$

Ahora se procede en la forma normal, teniendo en cuenta que cada período completo de ceros después de la coma lleva un cero en el resultado:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0,00.05.40} & 0,02 \\ 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Es decir, que se ha comenzado la operación en el período 05 como si fuera el primero que existe, pero colocando un cero después de la coma.

Siguiendo con el procedimiento, se baja el período 40, se duplica la primer cifra de la raíz y se procede por tanteos en la forma ya conocida, habiéndose obtenido el número 3 que queda incorporado al resultado:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0,00.05.40} & 0,023 \\ 4 & 2 \times 2 = \ .\ 4 \\ \hline 140 & 43 \times 3 = 129 \\ 129 & \\ \hline 11 & \end{array}$$

6. — Operaciones con quebrados

Los quebrados o números fraccionarios no son otra cosa que una manera de expresar una cierta cantidad de partes que se ha tomado de una unidad. Así, si se divide un todo en cinco partes y se toman tres de ellas, se puede escribir esa cantidad así:

$$\frac{3}{5}$$

Lo cual quiere decir que el número colocado encima de la raya, llamado *numerador*, indica el número de partes que se toma de la cantidad total. El número colocado debajo de la raya se llama *denominador*, e indica la cantidad de partes en que se ha dividido el todo o la unidad.

Para ilustrar gráficamente un ejemplo práctico, supongamos que se corta un lápiz en cuatro trozos iguales, tomando tres de ellos. Esta cantidad referida al lápiz completo representa las tres cuartas partes y se escribe como un quebrado: $\frac{3}{4}$.

Evidentemente se podría escribir un número fraccionario decimal, para lo cual basta dividir el numerador por el denominador. Así en el caso de los tres trozos de lápiz, dividiendo el 3 por el 4 se obtiene el cociente 0,75, que es perfectamente equivalente al quebrado $\frac{3}{4}$.

Tipo de números fraccionarios

No siempre un quebrado expresa parte de un todo, pues puede indicar una cantidad exacta de enteros o una cantidad de enteros excedida en una parte.

Se tienen así los llamados quebrados *aparentes* e *impropios*. Se llaman aparentes los quebrados que indican una cantidad exacta de enteros, lo que resulta de obtener un cociente entero y exacto al dividir el numerador por el denominador. Así, son aparentes los siguientes quebrados:

$$\frac{1}{1}\,;\ \frac{4}{2}\,;\ \frac{8}{2}\,;\ \frac{9}{3}\,;\ \text{etc.}$$

Se llaman impropios los quebrados en los cuales el numerador es mayor que el denominador y por lo tanto su cociente resulta una o varias unidades enteras seguidas de una fracción. Así, son quebrados impropios:

$$\frac{5}{4}\,;\ \frac{3}{2}\,;\ \frac{8}{3}\,;\ \frac{25}{4}\,;\ \text{etc.}$$

Con la salvedad de que los quebrados aparentes son un caso particular de los impropios.

Reducción de quebrados

Para poder realizar operaciones fundamentales con los quebrados, a menudo es menester hacer con ellos previamente algunas reducciones. Otras veces la reducción se impone por razones de comodidad.

Tal es el caso de la *reducción de números*

mixtos a quebrados, de decimales a quebrados y la simplificación de quebrados.

Un número mixto no es otra cosa que un quebrado agregado a un entero, y para reducir el conjunto a un quebrado único se procede de la siguiente manera:

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

Quiere decir que se interpreta que el número mixto es la suma de un entero y un quebrado; la operación se realiza multiplicando el entero por el denominador y sumando a este producto el numerador. El quebrado resultante, que es impropio, toma por numerador la suma obtenida y por denominador el mismo del quebrado primitivo.

Para *reducir decimales a quebrados* no hay más que colocar como numerador las cifras significativas del decimal, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras seguían a la coma. Así por ejemplo:

$$0{,}25 = \frac{25}{100}$$

$$0{,}0017 = \frac{17}{10.000}$$

Se llama *simplificar un quebrado* a la operación que consiste en dividir numerador y denominador por una misma cantidad, obteniendo ambos cocientes enteros. El quebrado resultante es equivalente al primitivo pero sus cifras son menores. Por ejemplo:

$$\frac{60}{210} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Donde se ve que primeramente se ha dividido numerador y denominador por 10 y luego por 3. Es evidente que para simplificar hay que hacer la operación siguiendo las reglas de la divisibilidad, por lo cual conviene recordarlas.

Estas reglas son numerosas pero en la práctica basta aplicar la divisibilidad por 2, 3, y 5 que son las más frecuentes y que involucran de por sí a las correspondientes a los números 4, 6, 8, 9, 10, etc., cuyas reglas son más complicadas y pueden eludirse, pues por ejemplo en vez de dividir por 4 puede dividirse dos veces por 2, en vez de dividir por 6 puede dividirse por 2 y por 3, y así siguiendo.

Una cantidad es *divisible por 2* cuando termina en cero o cifra par. Así por ejemplo, 6, 18, 30, etc., son divisibles por 2.

Una cantidad es *divisible por 3* cuando la suma de sus cifras significativas da 3 o múltiplo de 3. Luego las siguientes cantidades son divisibles por 3:

255 porque $2 + 5 + 5 = 12$ múltiplo de 3
729 porque $7 + 2 + 9 = 18$ múltiplo de 3
120 porque $1 + 2 = 3$

Una cantidad es *divisible por 5* cuando termina en 0 ó en 5. Así son divisibles por 5 los números 1320, 65, 30, etc.

Para *reducir quebrados a decimales* no hay más que dividir el numerador por el denominador, colocando el cociente como resultado. Así:

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75$$

Suma de quebrados

Para sumar dos quebrados, se multiplica el numerador de uno por el denominador del otro; esta cifra se suma al producto del numerador del segundo por el denominador del primero y el resultado se coloca como numerador del resultado. Como denominador se pone el producto de los dos denominadores. Así, por ejemplo, para sumar:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$$

Se multiplica 2×4 y 3×5, sumándose estas cantidades y colocándolas como numerador. Se multiplica 5×4 y el resultado se coloca como denominador:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 5}{5 \times 4} = \frac{8 + 15}{20} = \frac{23}{20}$$

De modo que el resultado es otro quebrado cuyo numerador es 23 y el denominador 20.

Si en vez de dos quebrados solamente hay varios, se sigue un procedimiento similar, multiplicando el numerador del primero por todos los denominadores de los demás; el numerador del segundo por los denominadores de los demás, y así sucesivamente; todos esos productos se suman, y el resultado se coloca como numerador del resultado final. El denominador final se obtiene multiplicando todos los denominadores entre sí. Así, por ejemplo, si se trata de sumar los siguientes quebrados:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{2}$$

Se procederá de la forma indicada, es decir:

$$\frac{2 \times 5 \times 6 \times 2 + 3 \times 3 \times 6 \times 2 + 5 \times 3 \times 5 \times 2 + 7 \times 3 \times 5 \times 6}{3 \times 5 \times 6 \times 2}$$

De acuerdo con lo explicado más arriba. El resultado de las operaciones indicadas da:

$$\frac{120 + 108 + 150 + 630}{180} = \frac{1008}{180}$$

Resultado que podemos simplificar dividiendo por 3 tres veces y por 2 dos veces al numerador y al denominador, teniéndose:

$$\frac{1008}{180} = \frac{336}{60} = \frac{112}{20} = \frac{56}{10} = \frac{28}{5}$$

Resta de quebrados

Para restar dos quebrados se procede en forma similar al caso de la suma, sólo que los productos de cada numerador por el denominador del otro quebrado se restan en vez de sumarlos. Así, si se deben restar los dos quebrados siguientes:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$$

Se procede en la siguiente forma: se multiplica el numerador del primero por el denominador del segundo; a este producto se le resta el obtenido multiplicando el numerador del segundo por el denominador del primero. Lo que resulta se coloca como numerador del resultado. Como denominador se pone el producto de los dos denominadores:

$$\frac{3 \times 5 - 2 \times 4}{4 \times 5} = \frac{15 - 8}{20} = \frac{7}{20}$$

Obteniendo como resultado otro quebrado cuyo numerador es 7 y el denominador es 20.

Multiplicación de quebrados

Es la operación más simple que puede hacerse con las fracciones. En efecto, para multiplicar dos quebrados no hay más que multiplicar entre sí los numeradores para obtener el numerador del resultado, y hacer lo mismo con los denominadores obteniéndose el denominador del resultado. Así, para multiplicar los dos quebrados siguientes:

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{9}$$

No hay más que multiplicar 3×4 y colocarlo como numerador, y multiplicar 5×9 y colocarlo como denominador del resultado:

$$\frac{3 \times 4}{5 \times 9} = \frac{12}{45}$$

De modo que el resultado de la operación anterior da otro quebrado cuyo numerador es 12 y el denominador es 45, que simplificado por 3 da:

$$\frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

Si se trata de varios quebrados a multiplicar, se procede de idéntica manera. Se multiplican entre sí todos los numeradores y ese será el numerador del resultado; se multiplican todos los denominadores y se tiene el denominador resultante. Así la multiplicación siguiente se resuelve en esta forma:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 4 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 4 \times 7} = \frac{120}{420}$$

Resultando un nuevo quebrado cuyo numerador es 120 y el denominador es 420. Como se ve, la operación no puede ser más simple. Simplificando por 10, luego por 3 y luego por 2 se tiene:

$$\frac{120}{420} = \frac{12}{42} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

División de quebrados

Para dividir dos quebrados, se multiplica el numerador del primero o dividendo por el denominador del segundo o divisor, colocando la cifra obtenida como numerador del resultado. Luego se multiplica el denominador del primero por el numerador del segundo, y ese producto se coloca como denominador del resultado. Así por ejemplo, para dividir los dos quebrados siguientes:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$$

Se procede de la siguiente manera:

$$\frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$$

Resultando un nuevo quebrado con numerador 15 y denominador 8. Hay que aclarar que la operación de dividir quebrados puede indicarse de otra manera, en lugar de colocar entre ellos el signo de división. Para ello se colocan los dos quebrados uno encima del otro, el

dividendo arriba y el divisor debajo. En el ejemplo propuesto se tiene:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \times 5}{2 \times 4} \times \frac{15}{8}$$

Esta forma de escribir el cociente entre dos quebrados permite hacer interesantes apreciaciones en las fórmulas de Algebra, como veremos.

Potenciación y radicación de quebrados

Bastan un par de reglas para resolver todos los casos que se presenten. La primera dice: La potenciación de un quebrado se obtiene elevando separadamente el numerador y el denominador a la potencia indicada, y formando con esas cifras el quebrado resultante. Así, por ejemplo, si se desea elevar a la potencia de orden 3 el siguiente quebrado, se escribe así:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27}$$

Como se ve, se escribe el quebrado dentro de paréntesis y se coloca arriba el índice de la potencia que se trate. El resultado es un nuevo quebrado.

La segunda regla se refiere a la radicación, y dice: La radicación de un quebrado se obtiene extrayendo la raíz del mismo orden que la indicada al numerador y al denominador, y colocando los dos resultados formando el quebrado resultante. Por ejemplo, la radicación del siguiente quebrado se resuelve así:

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$$

Resultando un nuevo quebrado al extraer separadamente la raíz cuadrada del numerador y del denominador. Si la raíz fuera de otro orden y no 2, la operación se haría en forma similar, extrayendo la raíz de ese orden del numerador y del denominador separadamente, para obtener el resultado.

Reducción de quebrados a común denominador

Muchas veces en la práctica se prefiere realizar la suma y resta de quebrados mediante una operación previa que consiste en reducirlos a idéntico denominador. Ese procedimiento es el clásico aunque su aplicación requiere mayor número de operaciones que el que se explicó anteriormente. Por ello no es aconsejable, pero conviene conocer dicho procedimiento.

Para reducir quebrados a un denominador común o idéntico hay que buscar el menor número posible que divida exactamente a todos los denominadores en forma individual. Para ello hay que hallar el llamado *mínimo común múltiplo.* (M. C. M.).

El mínimo común múltiplo de varias cantidades se halla haciendo la simplificación completa de las mismas, mediante los menores divisores posibles. Se colocan las cantidades en columna y se toman luego todos los divisores comunes y no comunes con el mayor número de veces que aparecen en cada columna. Con un ejemplo se aclarará lo dicho:

48	2	36	2	30	2
24	2	18	2	15	3
12	2	9	3	5	5
6	2	3	3	1	
3	3	1	1		
1					

El divisor 2 aparece cuatro veces como máximo.

El divisor 3 aparece dos veces como máximo.

El divisor 5 aparece una vez como máximo.

Luego el mínimo común múltiplo vale:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 720$$

Las operaciones realizadas son las siguientes: primeramente se han hecho las simplificaciones con los mínimos factores a las 3 cantidades de las cuales quiere obtenerse el M. C. M. Se nota que el primer número que es 48 se ha podido simplificar cuatro veces por 2 y una vez por 3. Luego se cuentan los factores 2, los 3, etc., que aparecen en cada columna tomándose la cantidad mayor de veces cada una. El producto de todos esos factores comunes da el mínimo común múltiplo deseado.

Cuando se desea reducir quebrados a un común denominador hay que hallar el mínimo común múltiplo de todos los denominadores, el cual es el común denominador buscado. Por ejemplo, apliquemos este principio a los siguientes quebrados:

$$\frac{3}{20} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{18}$$

Para reducir a común denominador previamente determinaremos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

20	2	8	2	18	2
10	2	4	2	9	3
5	5	2	2	3	3
1		1		1	

$$\text{M. C. M.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$$

Este común denominador lo aplicamos a cada quebrado dividiendo por el denominador correspondiente y multiplicando el resultado por el numerador, colocándose el resultado como nuevo numerador. Así, para el primer quebrado, se divide 360 por 20 y resulta 18 que multiplicado por 3 da 54.

$\frac{3}{20}$ se reemplaza por:

$$360 \div 20 = 18$$

$$18 \times 3 = 54$$

Resulta el nuevo quebrado equivalente

$$\frac{54}{360}$$

Y operando así con los demás se obtienen los tres nuevos quebrados, equivalentes a los propuestos:

$$\frac{54}{360};\ \frac{90}{360};\ \frac{60}{360}$$

Suma y resta de quebrados aplicando común denominador

Es evidente que al hallar el denominador común a una serie de quebrados se puede aplicar un procedimiento simplificado para realizar sumas y restas, puesto que una vez que coinciden los denominadores basta sumar los numeradores para realizar la operación prefijada.

Ejemplo: Supongamos que se trate de los quebrados anteriores que pusimos como modelo para hallar el denominador común. O sea que se trata de la siguiente suma de quebrados:

$$\frac{3}{20} + \frac{2}{8} + \frac{3}{18}$$

Sabemos que estos quebrados reducidos a común denominador se han convertido en:

$$\frac{54}{360} + \frac{90}{360} + \frac{60}{360}$$

Luego la suma se hace directamente operando con los numeradores:

$$54 + 90 + 60 = 204$$

Siendo éste el numerador del resultado y 360, el denominador común, también lo es del resultado. De modo que se tiene como resultado final de la suma propuesta:

$$\frac{204}{360}$$

Simplificando este quebrado por 3, por 2 y otra vez por 2 queda:

$$\frac{17}{30}$$

que es el resultado final de la suma propuesta.

Supongamos ahora que se trata de restar dos quebrados, operación que se realizará aplicando el criterio expuesto:

$$\frac{8}{14} - \frac{3}{24}$$

Hallamos primeramente el denominador común, mediante el mínimo común múltiplo:

14	2	24	2
7	7	12	2
1		6	2
		3	3
		1	

$$\text{M. C. M.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 168$$

Reducción a común denominador:

$$168 \div 14 = 12 \qquad 12 \times 8 = 96 \qquad \frac{8}{14} = \frac{96}{168}$$

$$168 \div 24 = 7 \qquad 7 \times 3 = 21 \qquad \frac{3}{24} = \frac{21}{168}$$

Se trata de restar ahora los dos quebrados siguientes:

$$\frac{96}{168} - \frac{21}{168} = \frac{96 - 21}{168} = \frac{75}{168}$$

Este quebrado puede ser simplificado, pues el numerador y el denominador son divisibles por 3. Haciendo la división por 3 resulta:

$$\frac{75}{168} = \frac{25}{56}$$

Que es resultado final de la resta propuesta.

Conviene hacer notar que el procedimiento del común denominador no es aplicable a las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación de quebrados, porque no simplifica en nada a dichas operaciones. Además, como es fácil observar, si se hace una comparación entre el procedimiento explicado anteriormente y el de común denominador, muchas veces se prefiere el primero por ser más directo y menos engorroso.

Día 2

Hemos encarado el repaso de las operaciones fundamentales de la Aritmética con la única novedad para el lector de que empezamos a presentarlas de una manera un poco diferente; y es que poco a poco tenemos que habituarnos a pensar en fórmulas, a familiarizarnos con el modo de escribirlas y así cuando aprendamos a resolverlas la tarea nos resultará más sencilla. En la medida que la Aritmética nos sirva para entender mejor el Algebra y otras ramas de las Matemáticas, ello representará una ventaja inapreciable por el hecho de que al considerarla más elemental y usarla con frecuencia en la vida diaria, tendremos cierta familiaridad con el formuleo al avanzar en nuestro curso. Y como el objetivo de este libro es enseñar a entender y usar las fórmulas matemáticas que aparecen en los libros técnicos, conviene desde todo punto de vista que las operaciones de la Aritmética las escribamos como fórmulas, pues eso nos irá acostumbrando de a poco al manejo de las mismas.

En esta segunda jornada encararemos un tema muy interesante como es el de la proporcionalidad entre cantidades, las relaciones entre cifras, todo lo cual nos permitirá, trabajando con Aritmética, operar ya como si estuviéramos en el Algebra. El tema resultará conocido para muchos lectores, pero la revisión tendrá la ventaja de que aprenderemos a escribir y a nombrar las cosas con el sistema del formuleo matemático. Con esta aclaración ya podemos entrar en materia.

ESTUDIOS ADICIONALES DE ARITMETICA

7. — Partes proporcionales

Cuando debe distribuirse una cantidad entre las diversas partes según una regla o ley, o bien cuando debe tomarse una fracción o parte de un todo, se dice que se ha subdividido dicha cantidad en un cierto número de partes proporcionales o iguales.

Así, si se fracciona un terreno en 6 partes iguales, cada una de ellas es una sexta parte del total. Se observa de inmediato que tal operación puede indicarse o expresarse en forma de quebrado corriente:

$$\text{una sexta parte} = \frac{1}{6}$$

Si en lugar de tomar sólo una de las partes se toman varias, el numerador del quebrado no será la unidad sino el número de partes que se ha tomado. Así, si del terreno mencionado dividido en 6 partes se toman 4, escribiremos esa cantidad con el quebrado:

$$\text{cuatro sextas partes} = \frac{4}{6}$$

En la práctica se encuentra muchas veces la necesidad de tomar una cantidad proporcional de un todo expresada en la forma descripta.

Por ejemplo, se dirá que hay que tomar u obtener los tres cuartos de la cantidad 20. Tal operación se resuelve de la siguiente manera:

Para obtener una parte proporcional de un todo basta multiplicar el todo por el quebrado que expresa la proporción. En el ejemplo propuesto se tiene:

$$20 \times \frac{3}{4} = \frac{20 \times 3}{4} = 15$$

Quiere decir que 15 representa las tres cuartas partes del número 20.

Otras veces las partes proporcionales se indican mediante fracciones decimales, diciendo

por ejemplo que de un todo debe tomarse 0,25 u otra fracción decimal cualquiera.

Por ejemplo, si se indica que debe tomarse 0,15 de la cantidad 24, se procede a realizar la operación:

$$24 \times 0,15 = 3,6$$

Luego, 3,6 representa la fracción de 24 que se indicó.

8. — Razones o relaciones

Se denomina *razón* o también *relación* entre dos números o cantidades al resultado de dividirlos entre sí, o sea a su *cociente*. En Aritmética razonada, se llama *antecedente* al dividendo y *consecuente* al divisor. Veamos un ejemplo que nos ilustrará sobre la definición dada y sobre la forma de escribirla. Sean los números 6 y 3; el nombrado en primer término es siempre el antecedente y el seguro es el consecuente. Sin hacer cuentas, sabemos que la razón o relación entre 6 y 3 es 2, pero lo escribimos de dos maneras distintas: una de ellas es de poco uso en Matemáticas aplicadas a la técnica, pero conviene conocerla; es así:

$$6 : 3 = 2$$

y decimos que la razón entre 6 y 3 vale 2. La otra forma de escribir eso mismo es la más cómoda, porque el cociente queda indicado; ponemos:

$$\frac{6}{3} = 2$$

y decimos que la relación entre 6 y 3 vale 2. Nótese que para la primera forma de escribir hemos dejado la denominación *razón* y para la segunda usamos la palabra *relación*, cosa que hemos hecho intencionalmente para destacar que preferimos el segundo sistema; cuando comencemos a manejar fórmulas comprenderemos el motivo de esa preferencia.

La relación entre dos números puede no ser un número entero, y bastaría usar el mismo ejemplo anterior cambiando el antecedente por el consecuente para tener un nuevo caso. Diríamos que la relación entre 3 y 6 vale 0,5 y ello surge de inmediato:

$$\frac{3}{6} = 0,5$$

Ahora 3 es el antecedente, 6 el consecuente y 0,5 la relación entre ambos. En la técnica es muy común relacionar cantidades o magnitudes; por ejemplo oiremos decir que la relación entre la diferencia de potencial y la resistencia es la intensidad de corriente, y eso lo escribimos con letras, pero entonces entraríamos en el Algebra y ya llegaremos más adelante a ese tema.

9. — Proporciones

Dos relaciones iguales forman una proporción, no interesando cuán diferentes sean los antecedentes y los consecuentes entre sí. Por ejemplo, la relación entre 6 y 3 vale 2 y la relación entre 8 y 4 también vale 2; luego, esas dos relaciones, por ser iguales, pueden formar una proporción, que escribimos de las dos maneras que ya conocemos. La primera es así:

$$6 : 3 :: 8 : 4$$

y la leemos diciendo que seis es a tres como ocho es a cuatro. En la proporción, los números exteriores se llaman *extremos* y los que quedan en el centro se llaman *medios*, es decir que 6 y 4 serían extremos y los números 3 y 8 serían los medios. La otra manera de escribir la proporción es:

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$$

que se lee igual que antes, pero que permite una apreciación más rápida de que estamos frente a una igualdad, ya que los dos quebrados escritos tienen por resultado la cifra 2, en este caso.

En la práctica no sería muy útil escribir proporciones, ya que en las mismas todo es conocido, pero basta que se desconozca una de las cantidades o términos para que veamos el interés que presentan. Por ejemplo, deseamos encontrar un número que guarde con 4 la misma relación que 6 guarda con 3, para usar el mismo ejemplo anterior. Es evidente que ese número es 8, pero eso lo sabemos por haber elegido el caso ya conocido; en la práctica eso se llama *resolver* la proporción. Pero antes de entrar en ese tema conviene que conozcamos las propiedades más importantes de las proporciones, pues tienen aplicación en el formuleo matemático.

Propiedades de las proporciones

Las proporciones tienen muchas propiedades interesantes, pero describiremos las que nos sean útiles para el objetivo de este libro, dejando para los que gusten de estudiar Aritmética razonada las restantes.

La primera propiedad fundamental es que en toda proporción, *el producto de los extremos es igual al producto de los medios.* Veamos si eso es cierto en el ejemplo ya dado; los extremos eran 6 y 4 y los medios eran 3 y 8, luego escribimos:

$$6 \times 4 = 3 \times 8$$

y resulta evidente que esos dos productos son iguales, ya que dan 24.

La segunda propiedad que nos será muy útil dice que *un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.* En el ejemplo ya conocido tendríamos que un extremo, por ejemplo el 6, es igual al producto de los medios, 3 × 8, dividido por el otro extremo, o sea 4; se tiene:

$$6 = \frac{3 \times 8}{4}$$

y ya nos damos cuenta que esto será de provecho cuando desconozcamos uno de los extremos.

La tercera propiedad que interesa es similar a la anterior, y dice que *un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.* O sea que si tomamos el mismo ejemplo, el medio 3 es igual al producto de los extremos 6 × 4 dividido por el medio 8; escribiéndolo bien se tiene:

$$3 = \frac{6 \times 4}{8}$$

que servirá para los casos en que desconozcamos uno de los medios para determinar su valor.

La cuarta propiedad importante dice que en toda proporción *se puede alterar la colocación de los extremos o de los medios entre sí sin que la proporción se altere.* Tomemos la proporción ya vista tantas veces:

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$$

y alteremos el orden de los extremos, es decir cambiemos el 6 por el 4 y se tiene:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

y vemos que la proporción subsiste, aunque con distinta relación, ya que ahora cada quebrado o razón tiene por resultado 1,33 mientras que antes daba 2. Pero lo esencial es que la proporción se mantiene en ambas relaciones.

Si cambiamos de lugar los medios en lugar de los extremos, se tiene:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

y vemos que la proporción se cumple, ya que cada relación da un resultado de 0,75 o sea que son iguales.

La quinta propiedad dice que en toda proporción *se pueden invertir los términos de cada razón sin que la proporción se altere,* o sea que se puede cambiar ambos antecedentes por sus propios consecuentes y subsiste la proporcionalidad. Tomemos una vez más el ejemplo dado e invirtamos el 6 con el 3 en la primera razón y el 8 con el 4 en la segunda, y se tiene:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

y vemos que la proporción subsiste, aunque la relación ahora vale 0,5, pero igual para los dos quebrados.

La sexta propiedad de interés dice que en toda proporción *podemos sumar o restar los antecedentes con sus respectivos consecuentes* y mantenemos la proporción. Tomemos la última proporción escrita más arriba y hagamos primero la demostración con la suma propuesta; sumamos por un lado 3 + 6 y relacionamos con 6 y sumamos por otro lado 4 + 8 y relacionamos con 8:

$$\frac{3+6}{6} = \frac{4+8}{8}$$

y la proporción se cumple, puesto que resolviendo las sumas tenemos:

$$\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$$

obtenemos relaciones de 1,5 para ambas razones. Si hacemos una demostración con la resta propuesta en la propiedad, tomemos la última proporción escrita para poder restar, y se tiene:

$$\frac{9-6}{6} = \frac{12-8}{8}$$

y vemos que la proporción se mantiene, puesto que resolviendo las restas obtenemos una proporción:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

cuya relación vale 0,5 para ambas razones.

Hay más propiedades de las proporciones, pero escaparíamos al objetivo de este libro si siguiéramos desarrollando el tema. Se ha creído de interés plantear los casos más comunes y especialmente los que puedan tener alguna aplicación en la interpretación y resolución de fórmulas matemáticas.

Resolución de proporciones

En la práctica se presenta el caso de que en una proporción se desconozca uno de los términos y se conozcan los otros tres. La resolución es fácil, pues basta aplicar una de las propiedades. La cantidad o término desconocido se escribe con la letra x y luego se calcula el valor de x.

Por ejemplo, se desea hallar una cantidad que guarde con 5 la misma relación que 6 guarda con 2. Podemos escribir entonces:

$$\frac{x}{5} = \frac{6}{2}$$

y recordando la segunda propiedad, un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo, o sea:

$$x = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

es decir que 15 es el número que guarda con 5 la misma relación o proporción que 6 guarda con 2.

10. — Porciento

El porciento pertenece a la categoría de las partes proporcionales expresadas mediante decimales. En todos los casos la referencia es la cantidad 100 y se debe extender la proporción a otra cantidad determinada. Es decir que el por ciento indica que se debe tomar de una cantidad la misma parte que la propuesta toma del número 100.

Por ejemplo, cuando se dice que hay que calcular el cinco por ciento de 8.000 quiere expresarse que hay que hallar una cantidad que sea de 8.000 lo que 5 es de 100. Ello podría escribirse como una proporción colocando dos quebrados en la siguiente forma:

$$\frac{5}{100} = \frac{x}{8000}$$

Y sabemos que el cálculo de la cantidad x puede hacerse multiplicando en cruz un numerador por un denominador y dividiendo directamente por el que queda:

$$x = \frac{5 \times 8000}{100}$$

Pero tratándose de calcular porcientos no hay necesidad de referirse a una proporción en forma de quebrados, pues siempre debe multiplicarse el porciento por la cantidad propuesta y dividir por 100. En el caso anterior el cálculo da:

$$\frac{5 \times 8000}{100} = 400$$

De modo que 400 representa el cinco por ciento de 8.000. Para escribir en forma abreviada el porciento se emplea el símbolo % :

5 % de 8.000

Si se debe descontar a una cantidad un porciento determinado, las operaciones a realizar son las mismas, pero al final debe restarse el resultado del cálculo, de la cantidad propuesta.

Por ejemplo, al efectuar una compra de $ 300, se obtiene una bonificación del 3 % ; la suma real a abonar se calcula de la siguiente manera:

Primero se determina el 3 % de 300:

$$\frac{3 \times 300}{100} = 9$$

Luego se descuenta este resultado de la cantidad propuesta:

$$300 - 9 = 291$$

Siendo esta última cantidad la que se debía determinar, es decir, la suma real a abonar.

11. — Por mil

El por mil es también una proporción exacta, similar al porciento, pero que toma como referencia el número 1000 en lugar del 100. El cálculo se realiza de idéntica manera, reemplazando el divisor 100 por el 1000.

Por ejemplo, si se trata de obtener el 4 por mil de la cantidad 700, ello se escribe abreviando así:

4 ‰ de 700

Y el valor se obtiene multiplicando 700 por 4 y dividiendo por 1000:

$$\frac{700 \times 4}{1000} = 2{,}8$$

De modo que 2,8 representa el por mil especificado de la cantidad 700.

Si se presenta el caso de descontar un por mil a una cantidad, se procede en la misma forma que para el porciento.

Sea el caso de que se quiere saber cuántos kilogramos de carbón quedan disponibles de una cantidad de 12.000 kilogramos, si se sabe que la humedad evaporada representa una merma del 5 por mil.

El cálculo da:

$$\frac{12.000 \times 5}{1000} = 60$$

$$12.000 - 60 = 11.940$$

Que es la cantidad que queda después de descontar la merma expresada anteriormente.

12. — Relación de eficiencia

En muchas ocasiones se presenta en la Técnica la necesidad de calcular el rendimiento o la eficiencia de un determinado proceso. Ello suele expresarse en forma de porciento.

El problema generalmente se plantea sabiendo que de un todo sólo se aprovecha una cantidad menor, deseando saberse qué proporción guarda lo aprovechado con respecto a lo total.

Sea, por ejemplo, el caso de que se tienen 300 unidades de energía, o de otro factor cualquiera y se sabe que sólo se han aprovechado 240. La proporción útil se calcula dividiendo la segunda cifra por la primera:

$$\frac{240}{300} = 0,80$$

Pero como hemos dicho que ello debe expresarse en forma de porciento basta multiplicar el resultado anterior por 100:

$$0,80 \times 100 = 80 \%$$

Quiere decir que lo que se ha aprovechado representa el 80 % del total disponible.

También puede necesitarse determinar qué proporción representan las pérdidas, o sea lo que no se ha aprovechado. Para ello basta restar de 100 el porciento utilizado. En el ejemplo anterior las pérdidas son:

$$100 - 80 = 20 \%$$

Quiere decir que si de 300 unidades disponibles sólo se utilizan 240, ello representa un rendimiento de 80 % y una pérdida de 20 %.

13. — Magnitudes proporcionales

Cuando se relacionan números entre sí, sólo cabe el planteo de las razones y proporciones ya vistas, pero cuando se relacionan magnitudes o valores, pueden presentarse dos casos: la proporcionalidad *directa* y la proporcionalidad *inversa*.

La proporcionalidad es *directa* cuando la razón entre dos valores de una magnitud es igual a la razón entre dos valores correspondientes de la otra magnitud. Por ejemplo, una de las magnitudes es el peso de una mercadería y la otra magnitud es el precio. Lógicamente, a doble peso hay doble precio, es decir que se cumple la igualdad de relaciones. Otro ejemplo, el jornal de un operario y la duración de sus tareas, son magnitudes en proporción directa.

La proporcionalidad es *inversa* cuando la razón entre dos valores de una magnitud es inversa de la razón entre valores correspondientes en la otra magnitud. Por ejemplo, el tiempo que se tarda para realizar una tarea y la cantidad de operarios que trabajan en ella están en relación o razón inversa, ya que doble cantidad de operarios tardarán la mitad del tiempo en la misma tarea.

Estas definiciones son importantes para resolver problemas varios y en general, serán aplicadas en numerosos casos de la técnica.

14. — Regla de tres simple

Se llama regla de tres a un planteo aritmético que se emplea para resolver casos de proporciones, directas o inversas, con un término desconocido, y los restantes conocidos. Si basta una sola proporción, la regla de tres se denomina *simple* y si hay que plantear dos proporciones, se denomina *compuesta*. Al propio tiempo, la regla de tres toma el nombre de directa o inversa según el tipo de proporción que deba usarse.

En páginas anteriores, cuando hablamos de resolución de proporciones, no hemos hecho otra cosa que plantear una regla de tres, sólo que era una simple y directa; ahora nos ocuparemos de todos los casos, y eso nos servirá para ejercitar el tema de relaciones y proporciones y al mismo tiempo adquiriremos una práctica útil para el manejo del formuleo algebraico.

Regla simple y directa

Cuando el planteo de relacionar magnitudes se resuelve con una proporción sola y la misma es directa, la regla de tres se llama simple y directa. Supongamos que relacionamos cantidades de mercadería con sus precios, personal con sus jornales, etc., siempre que no in-

tervenga el tiempo de duración de trabajos; generalmente esos planteos guardan relaciones directas.

Veamos un ejemplo como problema. Se pregunta cuánto costarán 15 transformadores si cinco de ellos se pagaron 1.500 m$n. Es un caso típico de regla de tres simple, ya que los materiales y sus costos guardan proporcionalidad directa. La regla de tres se plantea escribiendo las cantidades conocidas primero y la desconocida después, en la siguiente forma:

5 transf. 1.500 $
15 transf. x $

y de esa forma de escribir sale sola la proporción, pues basta poner las rayitas en cada columna y nos quedarán escritas las dos relaciones:

$$\frac{5}{15} = \frac{1.500}{x}$$

y aplicando la segunda propiedad de las proporciones resolvemos el problema pues resulta el valor desconocido:

$$x = \frac{1.500 \times 15}{5} = 4.500 \text{ m\$n}$$

Y se ve que el problema no presenta ninguna dificultad, ya que se resuelve usando métodos conocidos.

Regla simple e inversa

Cuando interviene el tiempo de duración de trabajos, la proporción es generalmente inversa, ya que las magnitudes relacionadas tienen razones inversas; en efecto, a doble tiempo menor cantidad de gente para realizar una tarea y a doble cantidad de gente mitad de tiempo para terminarla. Eso es lo que hemos definido como magnitudes inversamente proporcionales, y para ellas no podemos aplicar la resolución de proporciones que hemos estudiado.

Veamos un problema como ejemplo. Se desea saber cuántos días tardarán tres operarios en hacer 30 bobinados si 9 operarios los han hecho en 2 días. En este caso, la regla de tres se plantea en forma similar al anterior, y escribimos:

9 oper. 2 días
3 oper. x días

no interesando la cantidad de bobinados realizados, ya que en los dos casos se trata de una cantidad fija de trabajo. Si ahora escribiéramos la proporción poniendo las rayitas en cada columna, tendríamos:

$$\frac{9}{3} = \frac{2}{x}$$

y se llegaría a un resultado disparatado, ya que nos daría menor cantidad de días con menos operarios. Entonces, lo que se hace en la regla de tres inversa es dar vuelta o invertir una de las relaciones, y escribimos:

$$\frac{9}{3} = \frac{x}{2}$$

y ahora aplicamos la tercera propiedad de las proporciones, calculando un medio desconocido por el cociente entre el producto de los extremos y el otro medio:

$$x = \frac{9 \times 2}{3} = 6 \text{ días}$$

De modo que la regla de tres simple e inversa se resuelve invirtiendo una de las razones de la proporción y luego se calcula la misma en la forma conocida.

15. — Regla de tres compuesta

Los problemas de regla de tres compuesta son aquellos en los que no se plantea una sola proporción sino dos, y pueden ser ambas directas o inversas o combinación de las dos clases. La solución se encuentra considerando primero una proporción y luego la otra, cuidando de hacer la inversión de una de las razones cuando se trata de proporcionalidad inversa.

Un ejemplo nos demostrará mejor lo que ocurre que muchas frases aclaratorias. Modifiquemos el último problema, diciendo que se desea saber cuántos días tardarán 3 operarios en hacer 60 bobinados si 9 operarios han hecho 30 en 2 días. Tenemos dos proporciones, una directa y otra inversa, ya que la cantidad de bobinados y la cantidad de operarios guardan proporcionalidad directa, mientras que la duración del trabajo guarda proporcionalidad inversa con la cantidad de operarios.

Escribamos primero el planteo de la regla de tres compuesta, colocando siempre arriba los datos conocidos en su totalidad y debajo los que tienen una incógnita:

9 oper. 30 bob. 2 días
3 oper. 60 bob. x días

Resolvamos primero una proporción, to-

mando cualquiera de ellas, por ejemplo la directa, y escribamos la regla de tres simple y directa:

30 bob. 2 días
60 bob. x días

de la cual, colocando las rayitas separando las cantidades en columna, tenemos la proporción:

$$\frac{30}{60} = \frac{2}{x}$$

que se resuelve aplicando la segunda propiedad, según lo hemos visto:

$$x = \frac{2 \times 60}{30} = 4 \text{ días}$$

Y ahora resolvamos la otra parte, que se escribe como una segunda regla de tres simple:

9 oper. 4 días
3 oper. x días

La proporción directa se escribiría poniendo las rayitas así:

$$\frac{9}{3} = \frac{4}{x}$$

pero debemos invertir una de las relaciones, y escribir:

$$\frac{9}{3} = \frac{x}{4}$$

y resolver ahora aplicando la tercera propiedad, o sea:

$$x = \frac{9 \times 4}{3} = 12 \text{ días}$$

Y ya tenemos el procedimiento para resolver todos los casos de regla de tres compuesta que se nos presenten, aunque sean diferentes a los propuestos. Hay reglas de tres compuestas que necesitan más de dos proporciones, pero se solucionan procediendo por pasos, cuidando siempre de considerar en cada uno si es una proporción directa o inversa.

16. — Progresiones aritméticas

Muchas veces observamos una sucesión de números que guardan entre sí cierta relación, tal como si entre cada uno de ellos y el que le sigue en la serie hubiera una razón fija; la misma puede tener cualquier valor, pero lo mantiene en esa colección seriada de números. Si cada cantidad de la serie se forma agregando a sus términos una cantidad fija, el conjunto se llama *progresión aritmética*.

Por ejemplo, se tiene la siguiente sucesión de números:

5; 8; 11; 14; m

Observamos de inmediato que cada número es igual al anterior, sumándole tres unidades; así llegamos hasta el último término, al cual le asignamos una letra m, adelantándonos un poco al estudio literal que se hace en Algebra. Si la serie tiene n cantidades, el valor numérico del último término se determina sumándole al primer término tantas veces la razón como términos haya menos uno, ya que el primero no debemos sumarlo. En la práctica se usa una fórmula para expresar esa operación, en la cual, si llamamos a al primer término de la progresión y r a la razón, el último término vale:

$$m = a + r\,(n - 1)$$

Por ejemplo, en la serie que dimos como ejemplo, si hubiera 20 términos, se tiene que:

Nº términos: $n = 20$
Razón: $r = 3$
1er. término: $a = 5$

Y el último término vale:

$$m = 5 + 3\,(20 - 1)$$

operación que se resuelve restando primero una unidad al 20, multiplicando ese resultado por 3 y sumando el 5, con lo que tenemos:

$$m = 5 + 3 \times 19$$
$$= 5 + 57 = 62$$

Es decir que al llegar al término Nº 20 el mismo vale 62.

La suma de todos los términos de una progresión aritmética también puede calcularse, ya que es igual al producto de la cantidad de términos por el valor promedio de sus términos. El promedio es siempre la mitad de la suma del primero más el último, o sea:

$$\text{promedio} = \frac{a + m}{2}$$

y por consiguiente, la suma de todos los tér-

minos de la progresión, desde el a hasta el m, o sea de los n términos vale:

$$S = \frac{a + m}{2} n$$

Por ejemplo, en la progresión que dimos como ejemplo, la suma de los 20 términos vale:

$$S = \frac{5 + 62}{2} 20$$

operación que se resuelve sumando primero el 5 con el 62, lo que da 67; dividimos ahora por 2, lo que nos da 33,5; este resultado lo multiplicamos por 20 y resulta:

$$S = 33,5 \times 20 = 670$$

Que es la suma de los términos de la progresión aritmética dada.

17. — Progresiones geométricas

Si la sucesión de números que forman una serie es de tal tipo que cada uno de ellos se halla multiplicando al anterior por un número fijo o razón, la progresión se llama geométrica. Por ejemplo, la serie de números:

4; 8; 16; m

forman una progresión geométrica, porque cada número es igual al anterior multiplicado por 2. En este caso la razón vale 2 y se la designa con la letra q. Siempre llamamos a al primer término y m al último. Si hay n términos en la progresión, el valor del último se encuentra multiplicando al primero por la razón tantas veces como términos haya menos uno. Pero esa operación de multiplicar a un número muchas veces por sí mismo se llama potenciación, es decir que habrá que multiplicar al primer término por la razón elevada a la potencia $(n - 1)$ o sea a un número que es una unidad menos que el número de términos de la progresión. Esto se puede escribir como una fórmula, así:

$$m = a\,q^{(n-1)}$$

Y quiere decir lo mismo; por ejemplo, si la progresión geométrica que dimos como ejemplo tiene 9 términos, el último tiene un valor:

$$m = 4 \times 2^8$$

ya que la razón valía 2 y el exponente es una unidad menor que el número de términos. La operación se resuelve así: primero elevamos el 2 a la potencia 8, lo que se hace en la forma conocida y nos da 256; luego multiplicamos esa cifra por 4 y tenemos 1024 que es el valor del último término:

$$m = 1024$$

Si se quisiera calcular la suma de los n términos de una progresión geométrica, no se puede proceder en la forma establecida para las progresiones aritméticas. Se podría hacer una demostración matemática que nos permitiría hallar la fórmula adecuada, pero como todavía no hemos estudiado Algebra, preferimos dar directamente la fórmula final que da la suma pedida, y que es:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Un ejemplo nos aclarará sobre el uso de la fórmula. Sea la progresión geométrica que dimos como modelo, en la cual a vale 4; la razón q vale 2 y la cantidad de términos n era de 9. Apliquemos la fórmula:

$$S = \frac{4\,(2^9 - 1)}{2 - 1}$$

Y las operaciones a realizar son: primero elevamos el 2 a la potencia 9, lo que nos da 512; le restamos una unidad y tenemos 511; lo multiplicamos por 4 y resulta 2044. Esta cifra debe ser dividida por el denominador, que se encuentra restando una unidad a la razón; como 2–1 = 1, al dividir por uno nos queda la misma cifra; luego:

$$S = 2044$$

es la suma de los 9 términos de la progresión geométrica dada.

Debemos aclarar que como aún no hemos hecho estudios del Algebra, el uso de cantidades en forma de letras en las fórmulas lo ofrecemos como anticipo y por esa razón hemos explicado bien el orden en que deben hacerse las operaciones; más adelante, cuando entremos en el cálculo literal, encontraremos todo esto más sencillo.

18. — Interés compuesto

Hemos estudiado anteriormente la manera de determinar el porciento de una cantidad, y eso es lo que se llama *interés simple*. Muchas veces, una suma de dinero se coloca para que

rinda interés, pero de tal manera que cada año, o período prefijado, se suma el interés al capital inicial y esa suma global es la que rinde intereses en el próximo período y así sucesivamente. En cierto modo se tendría una progresión aritmética en la cual la razón no es fija sino que se va incrementando; no es una progresión geométrica pura tampoco. Es una operación aritmética en la cual se forma una serie de términos, el primero de los cuales es el capital inicial *C*; el segundo se halla sumando a *C* los intereses que rinde en un período. Si cada peso rinde un interés *i* en ese período, la suma *C* rendirá:

$$C\,i$$

luego, tenemos que agregar al capital inicial la suma anterior, y al fin del primer período tendremos:

$$C + C\,i$$

En el segundo período tendremos intereses sobre el monto acumulado que calculamos, luego al final del mismo el monto vale:

$$C + C\,i + (C + C\,i)\,i$$

Y así determinaríamos los demás términos de la serie, hasta totalizar el número *n* de períodos, los que pueden ser anuales, semestrales, trimestrales, etc. La suma de todos los términos de la serie nos da el monto acumulado durante los *n* períodos, y esa suma vale, llamando *M* al monto:

$$M = C\,(1 + i)^n$$

en la cual la cifra *i* es el interés de un peso en el lapso de un período. Restando al monto *M* el capital inicial se obtiene la ganancia o interés total percibido I:

$$I = M - C$$

Un ejemplo nos aclarará el uso de la fórmula. Supongamos que se colocan 500.000 m$n al 15 % anual capitalizable trimestralmente por un lapso de 2 años. Lo primero que tenemos que hacer es determinar el interés de un peso por trimestre, o sea dividir el 15 % por 100 y por 4, ya que el año tiene 4 trimestres:

$$i = \frac{15}{100 \times 4} = 0{,}0375$$

Ahora aplicamos la fórmula que nos da el monto, y se tiene:

$$M = 500.000\,(1 + 0{,}0375)^8$$

donde el exponente es 8 pues éste es el número de trimestres que hay en 2 años. La fórmula se resuelve así: primero sumamos los dos números dentro del paréntesis y obtenemos 1,0375, cifra que tenemos que elevar a la potencia 8, es decir multiplicarla ocho veces por sí misma y nos da, despreciando decimales menores por razones prácticas, 1,335. Multiplicamos ahora esa cifra por los 500.000 pesos y obtenemos:

$$M = 667.500 \text{ m\$n}$$

Y la utilidad, o sea el interés total percibido es:

$$I = 667.000 - 500.000 = 167.000$$

19. — Imposición o capitalización

Otro tipo de problema en Aritmética en el cual intervienen intereses compuestos es cuando se debe integrar una suma de dinero aportando cuotas a plazos fijos, las cuales devengan interés compuesto a favor del depositante. Se conoce el capital o suma total *S* a integrar, la cantidad de períodos *n* y el interés que se capitaliza conjuntamente con las cuotas; se desea averiguar el importe de las cuotas, las que, por comodidad, son todas iguales. La fórmula que da el importe de las cuotas es:

$$C = \frac{S\,i}{(1 + i)^n - 1}$$

en la cual, *i* es el interés de un peso durante el lapso de un período de capitalización. Por ejemplo, supongamos que se debe integrar una suma de 800.000 m$n en 20 semestres iguales, gozando los depósitos y los intereses acumulados de un interés del 10 % anual. Determinemos el monto de las cuotas a pagar cada semestre. Primero calculamos el interés de un peso en un semestre y resulta:

$$i = \frac{10}{100 \times 2} = 0{,}05$$

Y ahora calculamos el monto de las cuotas con la fórmula dada:

$$C = \frac{800.000 \times 0{,}05}{(1 + 0{,}05)^{20} - 1}$$

Y para resolver la fórmula, primero sumamos a la unidad el número 0,05 y el resultado 1,05 lo elevamos a la potencia 20, lo que nos da 2,655; a ese número le restamos la unidad y nos queda 1,655 y es el divisor de la fórmula, que dividirá al producto de 800.000 por 0,05 y resulta finalmente 24.300 m$n. para cada cuota.

Día 3

Hemos repasado la Aritmética, sus operaciones principales y secundarias, y hemos revisado también la parte que estudia las cantidades proporcionales, todo lo cual nos servirá para ir conociendo de a poco el formuleo algebraico, que es nuestro objetivo. Todo lo visto hasta aquí pertenece a lo que podríamos llamar matemáticas elementales, de modo que es de suponer que los lectores lo han estudiado en la escuela primaria y lo han revisto en cualquier tipo de estudios secundarios que hayan cursado. Pero si esos temas estuvieran olvidados o no se hubieran aprendido bien, recomendamos que no se siga adelante sin haberlos asimilado bien, pues lo que sigue necesitará del dominio de esas nociones de Aritmética. No hay que aferrarse a la idea de que cada capítulo de este libro debe aprenderse en un día, pues eso es válido para los que ya estudiaron anteriormente algo de Matemáticas o para los que tienen cierta predisposición natural. Insistimos entonces en que no se avance en la lectura hasta no tener la seguridad de haber aprendido bien lo ya leído, ya sea como repaso de algo conocido o como estudio de un tema nuevo. Si se cumple con este pedido no cabrá duda acerca del resultado final, que, como ya lo hemos dicho, será el que cuando leamos un libro técnico no tendremos dificultades en entender las fórmulas y poder aplicarlas para resolver los problemas que encontremos.

Ahora entraremos en otro tema apasionante: el Algebra. El poder expresar los problemas con letras en vez de números aparece como una complicación, pero en la medida que avancemos en el estudio comprenderemos que es una comodidad muy grande. Léase detenidamente cada párrafo y resuélvanse los problemas puestos como ejemplo sin mirar el libro; conseguido eso podemos continuar adelante.

OPERACIONES FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA

El Algebra es una Aritmética de las letras, es decir, hace las mismas operaciones que esta última hacía con números, pero empleando letras o símbolos. A primera vista parecería que no es posible sumar dos letras entre sí, pero no se trata de eso. Supongamos que un comerciante diga: "La cuarta parte del beneficio que deja al mes el negocio lo reservo para ampliaciones; la mitad es para mis gastos personales y el resto para el ahorro. Si quiere dejar escrito eso, le ocuparía una gran cantidad de palabras. El Algebra le suministra la forma de ahorrar tiempo y espacio, porque con llamar a la suma destinada a ampliaciones A; a la suma reservada para sus gastos G y a la que depositara en el Banco B, él puede escribir, si llama U a las utilidades totales:

$$A + G + B = U$$

Con lo que quiere decir que la suma de lo que invierte en ampliaciones, más lo que gasta, más lo que coloca en el banco, da el total de sus utilidades. Como cada mes será variable la ganancia total, también variarán proporcionalmente las demás cantidades, de modo que no se puede indicar en la suma anterior lo que vale cada letra. En eso consiste el Algebra, en dejar las operaciones indicadas, a lo que se llama *fórmula*, y cuando se sabe el valor de cada letra se pueden realizar las operaciones y encontrar el resultado.

Además de la suma que se indica en la fórmula anterior, se puede escribir otras referentes al mismo asunto, que permitirán calcular cuánto vale A, G y B en cuanto se sepa la cifra total de Utilidades. En efecto, se dijo que la suma destinada a ampliaciones era la

cuarta parte de las ganancias, luego se puede escribir:

$$A = \frac{U}{4}$$

Con lo que queda expresado que para calcular A, o sea la suma de ampliaciones, se debe dividir U, o sea las Utilidades totales, por 4. En la misma forma se expresan mediante una fórmula las cantidades G y B. En efecto, los gastos importan una mitad de las utilidades, de modo que se puede escribir:

$$G = \frac{U}{2}$$

Y la cantidad a depositar en el banco representa la cuarta parte restante de las ganancias, es decir, que se tiene:

$$B = \frac{U}{4}$$

Se tienen de esta manera cuatro fórmulas simples; una de ellas indica una suma y las otras tres una división. Con ellas se expresan todas las cuentas que debe hacer ese comerciante cada fin de mes para distribuir su dinero. Obsérvese que una fórmula de Algebra, entonces, no es más que un conjunto de letras; para resolverla hay que colocar en el lugar de cada una el número que la reemplaza y luego hacer las operaciones de Aritmética indicadas.

Con esto parecería que afirmamos que el Algebra no es más que una forma de escribir las cosas, pero sin embargo no es así. Primero, porque la fórmula de Algebra es siempre o casi siempre el resultado de una cantidad de operaciones hechas, sin las cuales no se hubiera podido aplicar la Aritmética al problema; y segundo, porque los ejemplos que estamos dando son de Algebra elemental, donde no hay complicaciones, y donde todos los problemas se resuelven finalmente con Aritmética simple.

¿Cuál es, entonces, la utilidad inmediata de esta parte de las Matemáticas que se llama Algebra? La de poder plantear un conjunto de operaciones aritméticas mediante una fórmula, operaciones que se harán en cuanto se sepa el valor numérico de cada letra de dicha fórmula. Así, por ejemplo, si se dice que para calcular la velocidad de un automóvil, hay que dividir el camino recorrido por él, por el tiempo que tardó en recorrerlo, eso se puede expresar mediante una fórmula como ésta:

$$V = \frac{D}{T}$$

que se lee: "V es igual a D sobre T" o, también, "V es igual a D dividido por T". Con esta fórmula indicamos que para saber la velocidad se debe dividir la distancia que ha recorrido el automóvil, por el tiempo que tardó en recorrerla. Así, por ejemplo, si ha cubierto un camino de 200 kilómetros en 2 horas, la velocidad se calcula reemplazando en la fórmula: D por 200 y T por 2, en esta forma:

$$V = \frac{D}{T} = \frac{200}{2} = 100 \text{ Km/h}$$

siendo el resultado de 100 kilómetros por hora, que se abrevia Km/h. Sin aplicar el Algebra hubiéramos sabido que para calcular la velocidad hay que dividir la distancia por el tiempo, pero la fórmula permite dejar la operación indicada para evitar que se produzcan confusiones, porque, después de aprender unos cuantos centenares de operaciones parecidas a la que hemos presentado, ya no se recordará si había que multiplicar o dividir la distancia por el tiempo. La fórmula permite dejarlo escrito en forma muy simple y basta darle un vistazo para poder saber inmediatamente cuál era la cuenta o las cuentas que había que hacer. Porque a veces para calcular algo no hay que hacer sólo una cuenta sino varias y no es fácil recordar de memoria cuáles eran. La fórmula dice, en el mínimo espacio, todo lo que hay que hacer.

20. — Cantidades positivas y negativas

En Aritmética elemental se enseña que no se puede restar una cantidad mayor de una menor, pero en Algebra veremos que eso es posible, siempre que se haga una convención. Supongamos que una persona sale de Buenos Aires hacia el Polo Norte, pero por error camina 10 kilómetros hacia el polo Sud, es decir, en dirección contraria. A esa distancia recorrida en sentido contrario a la que debía recorrerse, le asignaremos un signo negativo, escribiendo:

$$-10 \text{ Km}$$

que se lee: menos diez kilómetros. Es decir que la persona ha recorrido menos 10 Km. en dirección al Polo Norte, o lo que es lo mismo, más 10 Km. hacia el Polo Sud.

Las cantidades positivas se escriben sin ningún signo detrás de ellas. Así, si se quiere expresar una cantidad que no es negativa, se puede escribir, si esa cantidad es 20:

$$+20$$

pero se prefiere omitir el signo y poner simplemente:

20

En cambio, si la cantidad es negativa se debe poner el signo (—) detrás de la misma, indefectiblemente.

Pongamos un ejemplo clásico para distinguir bien las cantidades positivas de las negativas. Supongamos que se restan las dos cantidades siguientes:

$$20 - 12 = 8$$

El resultado es una cantidad positiva, tal como todas las que hemos visto en las operaciones del Algebra y la Aritmética hasta aquí. Quiere decir que toda cantidad que no lleve detrás de ella el signo menos (—), es positiva. Supongamos ahora que restamos estas dos cantidades:

$$7 - 12$$

Que parece ser una operación imposible. Sin embargo en Algebra está permitida, para lo cual se cambia el orden de los términos, restando el menor del mayor, pero poniendo el signo negativo al resultado:

$$7 - 12 = -(12 - 7) = -5$$

Quiere decir que se puede hacer la resta, pero invirtiendo los términos, y colocando signo negativo (—) al resultado. Nótese que en el ejemplo último hemos puesto dos paréntesis para encerrar la resta indicada cuando se han invertido los términos. El objeto del paréntesis es para indicar que el signo que está detrás de él afecta al resultado de la operación y no al primer término, pues si no estuviera ese paréntesis parecería que el signo negativo pertenece al 12 y no a toda la operación. Más adelante veremos otras aplicaciones del paréntesis.

Una vez que se opera con la misma facilidad con cantidades positivas que con las negativas, puede considerarse el caso de operaciones de suma y resta algebraica cambinada. Para ello se deben dar las reglas de los signos:

1ª Regla

En todo caso que se sumen dos cantidades positivas, el resultado da una cantidad positiva, como se ha visto, y como es lógico. Por ejemplo:

$$8 + 4 = 12$$

2ª Regla

Cuando se suman cantidades que tienen signos distintos, por ejemplo una positiva y una negativa, el resultado lleva el signo de la mayor. Así por ejemplo:

$$9 + (-4) = 5$$

Es decir, que al sumar la cantidad positiva 9 con la cantidad negativa -4, en cuyo caso hay que poner un paréntesis para encerrar a la última cantidad y poder indicar su signo, el resultado lleva el signo positivo, que es el de la mayor. Nótese que la suma se convierte en una resta, en tales casos, es decir, que se puede quitar el paréntesis, siempre que se escriba:

$$9 - 4 = 5$$

Otro ejemplo muestra un caso distinto en el que la mayor es la cantidad negativa, por lo cual el resultado también lo será:

$$-8 + 2 = -6$$

Que se puede también escribir:

$$2 + (-8) = 2 - 8 = -6$$

Puesto que para sacar el paréntesis se cambia el signo de la operación indicada que es una suma, por el de resta.

En virtud de las consideraciones que preceden, puede indicarse que la suma de una cantidad negativa es en realidad una resta, es decir que cuando se encuentran dos signos, uno (+) y otro (—), queda definitivamente el (—). Esto para la indicación de las operaciones, porque el resultado ya sabemos que llevará el signo que tenía la cantidad mayor.

3ª Regla

Cuando se resta una cantidad negativa, la operación se convierte en una suma, es decir que cuando se encuentra un signo (—) con otro (—), se convierte en un (+). Así la operación siguiente:

$$6 - (-4) = 6 + 4 = 10$$

Puesto que restar el -4 equivale a sumarlo, de acuerdo con la regla dada. Este detalle debe tenerse en cuenta muy especialmente, porque no es tan evidente como los que emanan de las dos reglas anteriores.

La resta de una cantidad positiva no necesita regla adicional, porque ya se ha visto bajo el título de sustracción cómo se procede, es decir se restan directamente las cantidades.

En realidad es un caso de encuentro de un signo — con uno +, y vemos que hay que restar, de modo que resulta un signo —. De todas las reglas anteriores puede deducirse una sola, que es general, y que dice:

Cuando se encuentran dos signos iguales (+ y + ó — y —) *la operación resultante es una suma, y cuando se encuentran dos signos distintos* (+ y — ó — y +), *la operación resultante es una resta.* También se dice, generalizando la expresión, que: más por más o menos por menos da más, y que más por menos o menos por más da menos.

En el curso de operaciones que se presenten en lo sucesivo se podrán ver algunas aplicaciones interesantes de las operaciones combinadas de suma y resta de Algebra, y se notará que una vez que se adquiere práctica no presentan ninguna dificultad de consideración.

21. — Desigualdades

En el planteo de operaciones algebraicas se presenta muchas veces la necesidad de escribir dos cantidades que sabemos diferentes, y hay que expresar en forma algebraica esa diferencia. Por ejemplo, si tenemos los números 3 y 5, sabemos que son diferentes, y podemos escribirlos juntos mediante un signo que exprese esa condición:

$$3 \neq 5$$

donde el signo interpuesto dice que 3 es diferente de 5. Si son letras, se presenta el mismo caso, de modo que dos letras A y B que representan cantidades que sabemos diferentes, las escribimos:

$$A \neq B$$

A veces sabemos que la diferencia entre dos cantidades estriba en que una es mayor que la otra, y entonces usamos el signo matemático que significa *mayor que*, y que se escribe así:

$$5 > 3$$

y que se lee; *cinco es mayor que 3.* Lógicamente, hay un signo que especifica el *menor que*, y en el caso anterior damos vuelta la frase y decimos que 3 es menor que 5, poniendo:

$$3 < 5$$

Si se trata de expresiones literales, también usamos los signos de mayor que y menor que, cuando sabemos que ocurren esas circunstancias entre los valores representados por letras. Así, si una cantidad A es mayor que otra B, escribiríamos:

$$A > B$$

Y si una cantidad D es menor que otra E, se escribe:

$$D < E$$

De cuyas dos expresiones se deduce, lógicamente que:

$$B < A$$

y que:

$$E > D$$

En los estudios del Algebra se nos presentarán muchas veces los signos explicados, de modo que el lector debe recordarlos.

22. — Operaciones fundamentales

Son del mismo nombre que las fundamentales de la Aritmética y se resuelven en forma parecida. Sólo que debemos recordar que operaremos con letras, pero no exclusivamente, pues las fórmulas tienen muchas veces mezcla de letras y números. Para comprobarlo no hay más que ver el ejemplo que hemos dado en páginas anteriores, sobre reparto de utilidades de un comerciante; la primera fórmula tenía solamente letras y las tres restantes letras y números. Así, se hablará de suma, resta, multiplicación o productos, división o cociente, potenciación, radicación, etc.

El resultado de las operaciones algebraicas, como se las llama, será también una letra, un conjunto de letras o un conjunto mixto de letras y números, generalmente más simple que la fórmula primitiva.

23. — Suma o adición

La suma de cantidades algebraicas sólo se puede hacer si todas ellas son homogéneas, es decir si están formadas por la misma letra o símbolo. En caso contrario la suma quedará indicada y se resolverá únicamente reemplazando las letras por las cantidades respectivas. Así por ejemplo, se puede sumar directamente:

$$a + a + a + a$$

mediante una operación algebraica simple, pero no se puede sumar, si no se conocen los

valores numéricos de las letras, las siguientes cantidades:

$$a + b + c + d$$

Para hacer esta última operación hay que saber cuánto valen *a*, *b*, *c* y *d*, numéricamente y sumar esos números. En la operación anterior, en cambio, como todas las letras son iguales se suman como si fueran números. Si sumamos cuatro letras *a*, se obtendrá:

$$a + a + a + a = 4a$$

Como lo dice la lógica y también la regla de Algebra de la suma.

Supongamos otro ejemplo un poco diferente en la escritura pero igual en el fondo. Sean las cantidades siguientes:

$$b + 3b + 2b = 6b$$

Es decir que el resultado de la suma será 6 *b*, como resultado de sumar todas las cantidades de letras *b* que se tienen. Obsérvese que cuando la letra *b* no tiene ningún número al lado, se interpreta como que vale una sola unidad. En la operación última se leería:

una *b* más tres *b* más dos *b* igual a seis *b*

Como se puede ver la suma algebraica no ofrece ninguna dificultad. Se escribe y se resuelve en la misma forma que la suma de la Aritmética, sólo que el resultado deja indicado una cierta cantidad mixta, formada por letras y números. Veamos un ejemplo algo distinto pero igualmente fácil:

$$2a + 4a + b + 5b + a$$

Como se ve aparecen sumas de términos que tienen la letra *a* y la letra *b*, y no están agrupados por letras distintas. Así es como se presentan las sumas algebraicas muchas veces en la práctica. Para resolver una serie de términos como la que hemos presentado, que se llama *polinomio*, se suman separadamente las *a* y las *b* o las letras que hubiera:

$$2a + 4a + a = 7a$$
$$b + 5b = 6b$$

y se escribe el resultado en esta forma:

$$2a + 4a + b + 5b + a = 7a + 6b$$

Quedando resuelta la ecuación, pues para seguir haciendo cuentas habría que saber cuánto valen separadamente *a* y *b* en números.

24. — Resta o sustracción

Se procede en forma completamente similar a la suma pero siguiendo las reglas de la resta. Pongamos un ejemplo:

$$7a - 3a = 4a$$

y se lee: siete *a* menos tres *a* igual a cuatro *a*. Como se ve, no hay más que restar las cantidades indicadas de letras que se disponen. Si se trata de varias cantidades en vez de dos, se procede en la misma forma:

$$12b - 3b - 2b - b = 6b$$

En efecto, para saber cuántas *b* nos quedan no hay más que restar las cantidades parciales indicadas, que son:

$$12 - 3 - 2 - 1 = 6$$

según las reglas de la Aritmética. Nótese que la última cantidad o término de la ecuación era *b* y eso equivale, según sabemos, a una *b*.

Un ejemplo con dos o más letras no presenta ninguna dificultad, según se vio en la suma. En la resta se tiene el mismo caso. Veamos el polinomio:

$$9a + 2b - 5a - b - a$$

Y se resuelve restando separadamente las *a* y las *b*:

$$9a - 5a - a = 3a$$
$$2b - b = b$$

Y colocando después el resultado en la forma conocida:

$$9a - 2b - 5a - b - a = 3a + b$$

En idéntica forma que en el caso de la suma de cantidades con letras distintas, ya visto. Habrá llamado la atención la mezcla de una suma con restas, pero ello es común en Algebra.

25. — Producto o multiplicación

Es la operación algebraica que corresponde a la Aritmética de igual nombre. Se indica un poco diferente y se presentan distintos casos, interviniendo también la regla de los signos dada para las operaciones anteriores.

En Algebra se suele suprimir todo signo para indicar un producto, escribiendo simplemente las dos cantidades a multiplicar una al lado de la otra. El uso del signo (×) queda

valores numéricos de las letras, las siguientes cantidades:

$$a + b + c + d$$

Para hacer esta última operación hay que saber cuánto valen *a*, *b*, *c* y *d*, numéricamente y sumar esos números. En la operación anterior, en cambio, como todas las letras son iguales se suman como si fueran números. Si sumamos cuatro letras *a*, se obtendrá:

$$a + a + a + a = 4\,a$$

Como lo dice la lógica y también la regla de Algebra de la suma.

Supongamos otro ejemplo un poco diferente en la escritura pero igual en el fondo. Sean las cantidades siguientes:

$$b + 3\,b + 2\,b = 6\,b$$

Es decir que el resultado de la suma será 6 *b*, como resultado de sumar todas las cantidades de letras *b* que se tienen. Obsérvese que cuando la letra *b* no tiene ningún número al lado, se interpreta como que vale una sola unidad. En la operación última se leería:

una *b* más tres *b* más dos *b* igual a seis *b*

Como se puede ver la suma algebraica no ofrece ninguna dificultad. Se escribe y se resuelve en la misma forma que la suma de la Aritmética, sólo que el resultado deja indicado una cierta cantidad mixta, formada por letras y números. Veamos un ejemplo algo distinto pero igualmente fácil:

$$2\,a + 4\,a + b + 5\,b + a$$

Como se ve aparecen sumas de términos que tienen la letra *a* y la letra *b*, y no están agrupados por letras distintas. Así es como se presentan las sumas algebraicas muchas veces en la práctica. Para resolver una serie de términos como la que hemos presentado, que se llama *polinomio*, se suman separadamente las *a* y las *b* o las letras que hubiera:

$$2\,a + 4\,a + a = 7\,a$$
$$b + 5\,b = 6\,b$$

y se escribe el resultado en esta forma:

$$2\,a + 4\,a + b + 5\,b + a = 7\,a + 6\,b$$

Quedando resuelta la ecuación, pues para seguir haciendo cuentas habría que saber cuánto valen separadamente *a* y *b* en números.

24. — Resta o sustracción

Se procede en forma completamente similar a la suma pero siguiendo las reglas de la resta. Pongamos un ejemplo:

$$7\,a - 3\,a = 4\,a$$

y se lee: siete *a* menos tres *a* igual a cuatro *a*. Como se ve, no hay más que restar las cantidades indicadas de letras que se disponen. Si se trata de varias cantidades en vez de dos, se procede en la misma forma:

$$12\,b - 3\,b - 2\,b - b = 6\,b$$

En efecto, para saber cuántas *b* nos quedan no hay más que restar las cantidades parciales indicadas, que son:

$$12 - 3 - 2 - 1 = 6$$

según las reglas de la Aritmética. Nótese que la última cantidad o término de la ecuación era *b* y eso equivale, según sabemos, a una *b*.

Un ejemplo con dos o más letras no presenta ninguna dificultad, según se vio en la suma. En la resta se tiene el mismo caso. Veamos el polinomio:

$$9\,a + 2\,b - 5\,a - b - a$$

Y se resuelve restando separadamente las *a* y las *b*:

$$9\,a - 5\,a - a = 3\,a$$
$$2\,b - b = b$$

Y colocando después el resultado en la forma conocida:

$$9\,a - 2\,b - 5\,a - b - a = 3\,a + b$$

En idéntica forma que en el caso de la suma de cantidades con letras distintas, ya visto. Habrá llamado la atención la mezcla de una suma con restas, pero ello es común en Algebra.

25. — Producto o multiplicación

Es la operación algebraica que corresponde a la Aritmética de igual nombre. Se indica un poco diferente y se presentan distintos casos, interviniendo también la regla de los signos dada para las operaciones anteriores.

En Algebra se suele suprimir todo signo para indicar un producto, escribiendo simplemente las dos cantidades a multiplicar una al lado de la otra. El uso del signo (×) queda

relegado a los casos de que se multipliquen únicamente números; así, por ejemplo, para indicar que se multiplicará 3 por 4, se escribe así:

$$3 \times 4$$

pero para indicar que se multiplicará A por B, se escribe simplemente así:

$$A\,B$$

sin ningún signo intercalado, quedando sobreentendido que se multiplicarán esas dos letras o, más propiamente dicho, se multiplicarán entre sí los equivalentes numéricos de esas letras. En un tiempo se usó un punto colocado entre las dos letras para indicar el producto, pero introducía confusiones. Así, se indicaba la operación anterior de esta manera:

$$\mathrm{A\,.\,B}$$

pero en el curso de esta obra emplearemos el sistema citado, es decir, no colocando nada entre las dos o más letras a multiplicar. Así, la siguiente operación:

$$A\,N\,b\,z$$

significa que en cuanto se conozcan los valores numéricos de A, N, b y z, se multiplicarán todos esos números entre sí para encontrar el resultado del producto indicado.

Pongamos un ejemplo numérico para aclarar dudas. Si se dice que para calcular la distancia recorrida por un automóvil se debe multiplicar su velocidad por el tiempo que ha estado marchando, ese producto se puede expresar por Algebra en la siguiente forma, llamando V a la velocidad, D a la distancia y t al tiempo:

$$D = V\,t$$

que se lee; D es igual a V por t, y que quiere decir lo que se ha escrito más arriba. Supongamos ahora que el automóvil recorre 60 Kilómetros por hora y que ha marchado durante 3 horas. Luego, el equivalente numérico de V es 60 y el de t es 3. Podemos realizar el producto indicado, poniendo:

$$D = 60 \times 3 = 180 \text{ Km}$$

y vemos que en este caso hemos debido poner un signo ($\times$) para evitar confusiones, pues si no hubiera parecido ser el número 603, que no tiene nada que ver. Luego el resultado de la fórmula es 180 Kilómetros, que es la distancia recorrida. Vemos que el producto algebraico ($V\,t$) no se puede resolver mientras no se conozcan los equivalentes numéricos de cada una de sus letras, igualmente que en el caso de otras operaciones de Algebra, pues si bien en la suma y resta se llegaba a una fórmula más simple, siempre quedaban letras, de las que había que conocer el equivalente numérico para hallar el resultado final. Sin embargo, puede notarse la ventaja del Algebra para expresar operaciones mediante fórmulas, porque con poner ($V t$) se suprime una larga explicación de operaciones a realizar, aclaradas con palabras.

Hasta ahora se han planteado productos de cantidades positivas, pero no siempre sucede así en la práctica. Si se deben multiplicar cantidades de varios signos (+ y —), se sigue la regla de los signos conocida, es decir:

+ por + da +
— por — da +
+ por — da —
— por + da —

Lo que se pone de manifiesto en los siguientes ejemplos:

$$8 \times (-2) = -16$$

donde hemos debido usar el signo por ($\times$) porque se trataba de números.

$$A\,(-C) = -A\,C$$
$$(-N)\,H = -N\,H$$
$$(-P)\,(-U) = P\,U$$

y así siguiendo se podría dar una cantidad enorme de ejemplos en los que se repetirían casos similares.

El orden de los factores no altera el producto, es decir que si se invierte la colocación de los términos no se altera el resultado. Así:

$$A\,b\,x\,M = b\,M\,x\,A$$

y lo mismo sucede si se trata de operaciones más complejas, como la siguiente:

$$(-6) \times 8 \times (-2) \times 4 =$$
$$= 8 \times 4 \times (-6) \times (-2)$$

lo que es fácil demostrar, haciendo las operaciones:

$$(-6) \times 8 = -48$$
$$(-48) \times (-2) = 96$$
$$96 \times 4 = 384 \text{ primer resultado}$$
$$8 \times 4 = 32$$
$$32 \times (-6) = -192$$
$$(-192) \times (-2) = 384 \text{ segundo resultado}$$

Y siempre que se tengan fórmulas de Algebra donde estén indicadas varias operaciones de productos, puede alterarse el orden de los factores, es decir, de las sucesivas cantidades a multiplicar, sin que se afecte el resultado final. Es una consecuencia de iguales consideraciones hecha en Aritmética.

Hay productos mixtos, de letras y números, para lo cual se siguen las mismas reglas dadas hasta aquí. Para simplificar esos productos basta agrupar al principio todos los números, ya que su colocación en el orden no afecta el resultado, y multiplicarlos, con lo que quedará un solo número. El criterio de simplificar las fórmulas de Algebra debe usarse siempre. Veamos un ejemplo:

$$3\,a\,b\,4\,C\,2\,M$$

que es un producto de varias letras y números. Como el orden de los factores no altera el resultado, se pueden colocar al principio todos los números, pero poniéndoles el signo por (×), para evitar confusiones:

$$3 \times 4 \times 2\,a\,b\,C\,M$$

y ahora queda una serie de multiplicaciones numéricas que se puede resolvar por Aritmética, con lo que la fórmula será simplificada; hagamos la operación con los números:

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

y esta cantidad se lleva a la fórmula anterior, resultando finalmente:

$$24\,a\,b\,C\,M$$

que es completamente equivalente a la primera dada, pero más simple. Así se procede en todos los casos en que sea posible.

26. — Cociente o división

Es la operación algebraica similar a la de Aritmética de igual nombre. Se indica en idéntica forma como lo hicimos en la explicación correspondiente, pues si bien no es común en Aritmética escribir las cantidades a dividir una sobre la otra separadas por una raya, en Algebra siempre se usa, por lo que tomamos esa costumbre desde el comienzo del libro.

En la división algebraica vale la regla de los signos dada para el producto, de modo que no la repetiremos aquí. Así por ejemplo:

$$\frac{-8}{4} = -2$$

Es decir que basta que uno de los números, el superior o el inferior, tenga signo (—) para que el resultado también lo lleve. En cambio si los dos números, dividendo y divisor tienen signo negativo, el resultado da (+), de acuerdo a la regla de los signos:

$$\frac{-6}{-2} = 3$$

En Algebra se presentan cocientes de letras solas, de números solos y de combinaciones de letras y de números. Siempre se indica escribiendo todo el *dividendo*, simple o compuesto, en la parte superior de la raya y llamándolo también *numerador;* el *divisor* se coloca en la parte inferior y se lo llama también *denominador*, del mismo modo que vimos en quebrados. En todo cociente hay que realizar primero las operaciones indicadas en el numerador y en el denominador, dejando la división para el final.

Veamos algunos ejemplos, teniendo presente que no siempre se puede llegar al resultado final de la fórmula indicada, porque hay que conocer los equivalentes numéricos de cada letra que interviene.

Supongamos que se desea calcular la velocidad de un automóvil, ejemplo ya presentado bajo otro aspecto de modo que nos servirá de comprobación. Sabemos que para calcular la velocidad hay que dividir la distancia recorrida por el tiempo tardado en recorrerla. Si deseamos expresar esa operación por una fórmula de Algebra, llamamos D a la distancia, V a la velocidad y t al tiempo, como hemos hecho anteriormente y escribimos:

$$V = \frac{D}{t}$$

y tendremos la fórmula de la velocidad, que nos permitirá calcular ésta cuando conozcamos la distancia y el tiempo. Supongamos que el automóvil ha recorrido 180 Kilómetros en 3 horas, según lo expusimos en un ejemplo anterior. La velocidad que mantuvo será:

$$V = \frac{180}{3} = 60 \text{ Km/hora}$$

pues la operación de división se hace por Aritmética, ya que conocemos los equivalentes numéricos de las letras V y t. Antes de reemplazar las letras por los números ya teníamos un cociente de Algebra, en la fórmula escrita más arriba, pero que queda así, sin resolver, como todas las fórmulas técnicas que veamos

en adelante. Tienen letras y números y sirven para calcular algo cuando se conocen los valores numéricos de cada letra.

Veamos unos ejemplos más. Supongamos que se tenga el siguiente cociente indicado:

$$\frac{33\,A\,B}{11\,C}$$

sabemos que las letras no las podemos dividir pero los números sí, de manera que la fórmula se puede simplificar algo haciendo la división del 33 por el 11, con lo que quedará:

$$\frac{3\,A\,B}{C}$$

y se nota que el resultado de la división numérica se coloca arriba, porque hemos dividido el número superior por el inferior. En cambio, en este otro ejemplo:

$$\frac{4\,M}{12\,C\,B}$$

puede simplificarse de dos maneras distintas, a elección: puede dividirse el 4 por el 12, lo que dará un decimal, que se coloca arriba:

$$\frac{0{,}33\,M}{C\,B}$$

o, como la fracción decimal no da exacta lo que obliga a despreciar los decimales restantes pues en la Técnica se acostumbra a utilizar sólo dos cifras decimales, dividir el 12 por el 4, pero colocando el resultado debajo:

$$\frac{M}{3\,C\,B}$$

que será preferible en este caso. Y así se resuelven los casos similares colocando el resultado numérico en el lugar que corresponda, de acuerdo a la forma en que se haya hecho la división.

27. — Potenciación

En idéntica forma que describimos esta operación en Aritmética, diremos que consiste en multiplicar una cantidad varias veces por sí misma. Así:

$$A^2 = A\,A$$
$$A^4 = A\,A\,A\,A$$

y se procede en la misma forma que vimos en Aritmética, con la salvedad que para encontrar el resultado numérico hay que conocer el valor de A, o de la letra que sea. Mientras no se lo conozca, se deja la operación indicada con la letra y el índice de la potencia, colocado en forma de un número pequeño en la parte superior.

La regla de los signos del producto es válida en la potenciación, es decir que siempre que se multipliquen cantidades de signos iguales (+) o (—) se tendrá un resultado positivo, y cuando las cantidades tengan signos distintos, el resultado será negativo. Pero en este caso, no se ve tan claro, porque al indicar la potencia la cantidad escrita es una sola, y siempre será multiplicada por sí misma. Para aclararlo, se da a la regla de los signos una ligera variante:

La potencia por o impar de una cantidad positiva da por resultado una cantidad también positiva. La potenciación par de una cantidad negativa da un resultado positivo y finalmente, la potenciación impar de una cantidad negativa da un resultado negativo.

Veamos algunos ejemplos:

$$5^2 = 25$$

$$4^3 = 64$$

$$(-2)^2 = (-2)\,(-2) = 4$$

$$(-5)^3 = (-5)\,(-5)\,(-5) = -125$$

puesto que cada uno de esos ejemplos se pueden demostrar por el camino de la regla de los signos para productos. Así, al elevar a la potencia 2 o sea al cuadrado la cantidad (—2), como el exponente o índice de la potencia es par, el resultado será positivo. En cambio, al elevar la cantidad (—5) a la potencia de índice 3 o sea al cubo, como 3 es cantidad impar, el resultado será negativo. Y así sucesivamente.

La potenciación de cantidades expresadas por letras, se deja indicada, lo que constituye la fórmula. Así, si se escribe:

$$A^4$$

se sobreentiende que la cantidad A será multiplicada por sí misma, es decir:

$$A^4 = A\,A\,A\,A$$

pero esa operación se podrá hacer cuando se sepa el valor numérico de A. Por ahora se dice que A debe ser elevada a la cuarta potencia, o sea es una potenciación de índice 4.

28. — Radicación

Se trata de una operación algebraica similar a la aritmética del mismo nombre pero debe hacerse una salvedad importante. En todas las operaciones algebraicas anteriores, no se ha limitado la resolución de un caso determinado. En la radicación hay una imposibilidad de operar, y es el caso de extraer la raíz de una cantidad negativa cuando el índice de la raíz es par. Y esto es porque como la radicación es la operación inversa de la potenciación, no es posible que un número positivo o negativo multiplicado por sí mismo tantas veces como lo indica un exponente o índice par resulte una cantidad negativa.

Aclaremos. La raíz cuadrada de 25, por ejemplo, es 5:

$$\sqrt{25} = 5$$

porque al multiplicar 5×5 resulta 25, y se comprueba la exactitud de la radicación. Pero no se puede resolver la siguiente operación:

$$\sqrt{-25}$$

porque no se puede encontrar un número, que multiplicado por sí mismo dé por resultado una cantidad negativa. Si en cambio fuera una raíz de índice impar, como:

$$\sqrt[3]{-125}$$

sabemos que esa raíz será igual a -5, porque multiplicando:

$$(-5)\,(-5)\,(-5) = -125$$

Ahora bien, la raíz de orden par de una cantidad positiva da por resultado una cantidad que puede ser positiva o negativa, puesto que en el caso de la raíz cuadrada de 25, que da por resultado 5, podemos comprobar:

$$5 \times 5 = 25$$

$$(-5)\,(-5) = 25$$

Y entonces no se sabe cuál es el verdadero resultado. Se opta por escribir el número que ha resultado con un doble signo (+) y (—), para elegir el que más convenga cuando haya fundamentos para hacerlo. Así, se pondrá:

$$\sqrt{25} = \pm 5$$

Las raíces algebraicas indicadas con cantidades subradicales formadas por letras se dejan indicadas como fórmulas, para resolverlas cuando se conozca su equivalencia numérica. Así:

$$\sqrt{AGH}$$

Se resolverá cuando se sepa cuánto valen A, G y H y no antes. (Dejamos constancia de que en el capítulo 11 aprenderemos a calcular las raíces negativas).

29. — Propiedades de los exponentes

En las operaciones algebraicas se utilizan frecuentemente exponentes negativos y fraccionarios. En párrafos anteriores hemos tratado los positivos solamente, pero no hay mayores dificultades en extender el criterio de cálculo a los otros tipos de exponentes.

Basta para ello dar algunas reglas fijas y mostrar en ejemplos cómo se aplican. Tales reglas se referirán a exponentes negativos y fraccionarios, puesto que los positivos ya han sido tratados.

1º) Un exponente negativo expresa que la cantidad a elevar se encuentra en el denominador; por ejemplo:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$10^{-8} = \frac{1}{10^8}$$

Esto quiere decir que el usar exponentes negativos no es otra cosa que una comodidad de escritura, ya que para hacer la operación hay que considerar a la cantidad en su verdadero lugar. Se evidencia esa comodidad cuando una expresión algebraica tiene cantidades en el numerador y en el denominador. Puede en tal caso utilizarse solamente el numerador procediendo de la siguiente manera:

$$\frac{a^2}{b^3} = a^2\, b^{-3}$$

$$\frac{a\, m^2\, p}{4\, s\, b^3} = a\, m^2\, p\, 4^{-1}\, s^{-1}\, b^{-3}$$

En el segundo ejemplo se destaca más netamente la comodidad que brinda el uso de exponentes negativos.

2º) Cuando una misma cantidad aparece elevada a potencia dos o más veces, se coloca una sola vez con el exponente que resulte de la suma algebraica de todos los exponentes

parciales. Si se trata del producto de las bases, se sumarán directamente los exponentes y si se trata de cocientes se restarán. Es decir, que si una misma cantidad elevada a cierta potencia figura en el numerador y en el denominador, se puede simplificar la expresión si se restan directamente los exponentes. Veamos algunos ejemplos de los dos casos:

$$a\,a^3 = a^{1+3} = a^4$$
$$b\,b^2\,b^5 = b^{1+2+5} = b^8$$

$$\frac{1}{m\,m^2} = \frac{1}{m^{1+2}} = \frac{1}{m^3} = m^{-3}$$

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

$$\frac{b\,b^3\,b^4}{b\,b^2} = \frac{b^{1+3+4}}{b^{1+2}} = \frac{b^8}{b^3} = b^{8-3} = b^5$$

Como se ve en los ejemplos propuestos las operaciones a realizar consisten en sumar los exponentes cuando aparecen las bases como producto y restarlos cuando se trata de un cociente.

3º) Una extracción de raíz equivale a un exponente fraccionario, al efecto de facilitar la escritura. Se sobreentiende que la fracción llevará la unidad como numerador y el índice de la raíz como denominador. Así:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{b} = b^{\frac{1}{4}}$$

Cuando la cantidad a la cual se le va a extraer la raíz, o sea la *subradical*, está elevada a cierta potencia, el exponente fraccionario lleva como numerador dicha potencia. Si el quebrado se puede simplificar, tal operación es correcta y debe hacerse. Ejemplos:

$$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$$

$$\sqrt[4]{b^4} = b^{\frac{4}{4}} = b^1 = b$$

$$\sqrt[4]{b^2} = b^{\frac{2}{4}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$$

Cuando se presentan operaciones algebraicas con raíces en el numerador y denominador, conviene siempre reducir a exponentes fraccionarios antes de simplificar para evitar errores frecuentes en estas clases de operaciones. Ejemplos:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

$$\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{b^6}} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{6}{4}}} = b^{\frac{2}{3}-\frac{6}{4}}$$

Estamos frente a una resta de quebrados indicada en el exponente, que se resuelve en la forma conocida:

$$\frac{2}{3} - \frac{6}{4} = \frac{8-18}{12} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Y ahora se puede continuar con la operación inconclusa:

$$b^{\frac{2}{3}-\frac{6}{4}} = b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{b^5}}$$

En la forma similar al presente se resuelven los demás casos que plantea la práctica.

Día 4

Ya hemos entrado en las expresiones literales, o sea en el Algebra, en la cual las cantidades se escriben mediante letras y también con números y letras; estudiamos la forma de realizar las operaciones fundamentales aunque por ahora no hemos llegado a resultados concretos, ya que por tal cosa entendemos el calcular algo y encontrar la solución. Pero el paso preliminar es aprender el manejo de las expresiones algebraicas y operar con las mismas sin dificultad. Más de un lector se habrá hecho la pregunta: ¿Para qué sirve sumar letras A o B, restarlas, escribirlas arriba o abajo de una rayita, si no se llega al resultado de un problema? El caso es fácil de contestar, ya que las fórmulas matemáticas que encontramos en todos los libros técnicos tienen esas letras con indicación de operaciones a realizar, una o varias, con sumas, restas, productos, divisiones, potencias y raíces. Cuando se debe resolver un problema técnico, se conocen los valores numéricos que equivalen a las letras de las fórmulas, luego pueden colocarse esos valores y encontrar la solución o resultado mediante simples operaciones aritméticas. Y el Algebra nos ha servido primero para tener la fórmula, segundo para hacer unas operaciones de simplificación y tercero, para dar fin al problema.

Ahora entraremos a la resolución de ecuaciones algebraicas, con una explicación previa acerca de operaciones especiales como son el factoreo, la simplificación y el uso del paréntesis, todo ello derivado de las operaciones fundamentales estudiadas en la jornada anterior. Entremos en materia, pues encontraremos asuntos muy interesantes.

ESTUDIOS ADICIONALES DE ALGEBRA

Hemos dicho que las expresiones algebraicas debían tener alguna utilidad, servir para calcular algo, para dar solución a problemas. Para concretar esa afirmación hay que estudiar las ecuaciones, planteos del Álgebra que equivalen a los problemas de la Aritmética. Para resolver ecuaciones hay que aplicar las operaciones fundamentales estudiadas en el capítulo anterior, pero antes debemos dominar mejor el manejo de las expresiones literales, aprender a hacer simplificaciones y a cambiar ciertas presentaciones que las mismas traen.

Concretamente, antes de estudiar las ecuaciones veremos cómo se usa el paréntesis en las expresiones algebraicas, cómo se manejan los factores comunes y cómo se simplifican tales expresiones, todo lo cual se aplica generalmente en las ecuaciones de que hablamos antes; esto último justifica la inclusión del tema preliminar en este capítulo ya que las expresiones algebraicas constituyen un tema de estudio, pero las ecuaciones tienen siempre un fin práctico, el de resolver algo. En otras palabras, aprenderemos primero a manejar mejor las expresiones algebraicas para entrar luego a conocer la utilidad práctica de las mismas, estudiando las ecuaciones y su resolución. Y no se piense que el tema de las ecuaciones nos ocupará solamente en esta oportunidad, ya que hay ecuaciones de primer grado con una incógnita y con más de una incógnita, ecuaciones de segundo grado, de tercer grado, etc. Pero no debemos adelantarnos a la exposición ordenada de los temas, de los cuales trataremos los que interesan al objetivo del presente libro.

30. — Uso del paréntesis

Cuando se desea indicar que un número o cantidad debe afectar a todos los términos de

una suma o resta, se puede indicar eso colocando un paréntesis que encierre a todos los términos afectados por la operación indicada. Así, si se tiene la siguiente suma algebraica:

$$5a + 3b - 4c$$

Y deben multiplicarse todos los términos por 2, esa operación puede indicarse de la siguiente manera:

$$2(5a + 3b - 4c)$$

Siendo evidente que el número 2 multiplica a los tres términos que quedan dentro del paréntesis. Si se desea eliminar el paréntesis deben realizarse las tres operaciones de multiplicar, quedando:

$$10a + 6b - 8c$$

No es necesario que el factor fuera del paréntesis sea número, pues puede ser una letra o varias, productos de letras con números, etc. Así, por ejemplo, la siguiente expresión multiplicada por 3 m quedaría:

$$3m(2a - 5p)$$

Y haciendo la operación, se multiplica cada término por el factor 3 m, con lo que se tiene:

$$6ma - 15mp$$

que es equivalente a la anterior. La operación realizada puede indicarse mediante un signo igual, de manera que tendríamos:

$$3m(2a - 5p) = 6ma - 15mp$$

lo cual constituye una igualdad algebraica o una identidad.

Muchas veces el paréntesis agrupa solamente a una parte de los términos de una expresión, porque la operación indicada afecta solamente a esa parte. Por ejemplo:

$$m + 3q - 5D(6 - 2b)$$

En esta expresión el paréntesis abarca solamente a los dos últimos términos y el factor 5 D debe multiplicarse por ellos únicamente. Al hacerlo hay que tener en cuenta la regla de los signos, pues se ve que tiene signo negativo. Haciendo operaciones se tiene:

$$m + 3q - 30D + 10Db$$

puesto que menos por más da menos y menos por menos da más.

Otras veces el paréntesis implica una operación diferente que un producto, como es el caso del cambio de signo, por ejemplo. Así, si se desea cambiar los signos de todos los términos de una expresión ello se indicaría de la siguiente manera:

$$-(3a - 5b) = -3a + 5b$$

Es decir, que el signo menos fuera del paréntesis indica que está afectando a todos los términos, tal como se ha resuelto la operación anterior.

Otro uso del paréntesis es para indicar la elevación a potencia de un grupo de cantidades que no puede hacerse en forma individual. Por ejemplo, si se tiene la expresión:

$$a + b$$

Y se desea elevarla al cuadrado, ello se expresa de la siguiente manera:

$$(a + b)^2$$

Pues desde ya advertimos que tratándose de elevar a cualquier potencia a varios términos sumados o restados, la operación no tiene por resultado la potencia parcial de cada término. Por ejemplo, es evidente que las dos siguientes operaciones dan resultados distintos:

$$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$$

$$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

No obstante, obsérvemos que se ha indicado expresamente el caso de suma y resta de términos, puesto que si fuera producto o cociente puede resolverse por potenciaciones parciales. Por ejemplo, las dos siguientes operaciones son estrictamente equivalentes:

$$(2 \times 5)^2 = (10)^2 = 100$$

$$2^2 \times 5^2 = 4 \times 25 = 100$$

Y lo mismo se podría demostrar para el caso de los cocientes.

En el terreno de las descripciones es posible seguir mencionando aplicaciones del paréntesis, pero ellas aparecen como caso particular a las ecuaciones algebraicas. Por tal motivo dejamos el detalle con lo visto anteriormente.

31. — Factor común

Cuando en una expresión algebraica se observa que algunos o todos los términos tienen un factor idéntico, el mismo puede ser escrito aparte, encerrando en un paréntesis a los tér-

minos afectados. Por ejemplo, la expresión siguiente:

$$4\,a\,m - a\,p + 3\,a + 15\,b$$

tiene en tres términos el *factor común* representado por la letra *a*. En tal caso se puede escribir fuera de un paréntesis que agrupe a tales términos:

$$a\,(4\,m - p + 3) + 15\,b$$

El paréntesis no abarca a todos los términos de la expresión, puesto que quedan fuera de él los que no contengan al factor común *a*.

En realidad la operación descripta consiste en dividir los términos que contienen un factor común, por él mismo, para colocarlo fuera del paréntesis. Si el factor común fuera un grupo de factores parciales no habría ningún inconveniente en realizar la misma operación. Siempre se dividiría cada término por el llamado factor común. Por ejemplo, la expresión:

$$2\,m^2\,b^3 + 4\,m\,b^4 - 6\,m^3\,b^2 - 3\,t\,p + 2\,m$$

Tiene evidentemente un factor que es común a los tres primeros términos. Dicho factor común es:

$$2\,m\,b^2$$

Dividiendo los tres términos mencionados por el factor común, aplicando las reglas de propiedades de los exponentes, se tiene:

$$2\,m\,b^2\,(m\,b + 2\,b^2 - 3\,m^2) - 3\,t\,p + 2\,m$$

Las operaciones realizadas han sido las de dividir los términos por $2\,m\,b^2$. El primer término que era $2\,m^2\,b^3$, al ser dividido por $2\,m\,b^2$ queda reducido a mb, y así se ubica en primer lugar dentro del paréntesis. Indicando esta operación en forma algebraica se obtiene:

$$\frac{2\,m^2\,b^3}{2\,m\,b^2} = m\,b$$

Puesto que al dividir 2 por 2 queda la unidad, al dividir m^2 por m queda solamente una m y al dividir b^3 por b^2 queda una b. Y así se ha procedido con los otros términos. Todas estas operaciones consisten en lo que se ha dado en llamar simplificación algebraica. De esto conviene que se especifiquen algunas de sus características.

32. — Simplificación algebraica

En toda expresión algebraica puede presentarse o no el caso de eliminar factores, divisores, sumandos o restandos que sean comunes a varios términos. Veremos bajo qué condiciones se emplean tales posibilidades.

En primer lugar la simplificación es sólo posible si el resultado obtenido es idéntico a la expresión de la cual se partió. Así, si se tiene que en una expresión se suma o resta una misma cantidad, o se multiplica o divide por idéntico factor, pueden anularse las dos operaciones inversas. Por ejemplo:

$$2\,a + 3\,b - 2\,a + 5\,m = 3\,b + 5\,m$$

Puesto que estábamos sumando y restando la misma cantidad 2 *a*, lo cual puede simplificarse. Si se tiene esta otra operación:

$$\frac{4\,b\,g\,m}{2\,g\,a} = \frac{2\,b\,m}{a}$$

Dado que en el numerador figura la letra *g* idéntica a la que se halla en el denominador con lo que puede ser simplificada; además, el factor numérico 4 del numerador es divisible por el 2 del denominador quedando entonces como factor del numerador el cociente 2 entre ambos. Otras veces la simplificación se refiere a elevación a potencias o extracción de raíces, siempre aplicada cuando se tienen dos operaciones inversas. Por ejemplo si en un cociente se tiene una misma letra en el numerador y denominador, elevada a distinta potencia, se puede simplificar restando los exponentes:

$$\frac{a\,m^3}{a^3\,m^2} = \frac{m}{a^2}$$

Tal como se ha explicado anteriormente, hablando de las propiedades de los exponentes. Y lo mismo puede extenderse al caso de las raíces que también han sido tratadas en particular.

33. — Polinomios algebraicos

Una expresión algebraica puede ser simple, o sea de un solo término, aunque el mismo tenga varias letras u operaciones indicadas que no sean suma o resta; si tiene más de un término con operaciones de suma o resta ya deja de ser simple y se denomina *polinomio*. El término simple se llama *monomio* y los polinomios pueden denominarse binomios, trinomios, etc., de acuerdo a la cantidad de términos o sumandos que haya.

Por ejemplo, los siguientes términos son todos monomios:

$$a$$

$$2\,a^3\,b^2$$

$$\frac{3\,a\,b^2}{4\,c}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}}$$

aunque son de muy diferente complejidad, en cuanto a las operaciones indicadas en cada uno. En cambio, los siguientes son binomios, por tener más de un término:

$$a + b$$

$$a^2\,b^3 + c^4$$

$$\sqrt{\frac{4\,a}{b}} - 3\,a\,b^2$$

siendo indistinto que el signo de cada uno sea positivo o negativo, puesto que los binomios indican una suma algebraica de dos monomios. Asi siguiendo escribiríamos un ejemplo de trinomio:

$$3\,a\,b^3 - 0{,}2\,a + \frac{3\,c}{b}$$

Y lo mismo para mayor cantidad de términos; siempre un polinomio tiene más de un término, o sea es la suma algebraica de varios monomios. En la práctica suele usarse únicamente la denominación de polinomio para expresiones de más de dos términos, reservándose las denominaciones de monomio y binomio para los casos que corresponden.

34. — Operaciones con monomios

Prácticamente todas las operaciones fundamentales del Algebra que hemos explicado anteriormente se refieren a monomios, de modo que poco es lo que quedaría por agregar; así diríamos que los monomios pueden sumarse, restarse, multiplicarse, dividirse, etc. Claro está que si sumamos dos o más monomios no homogéneos obtenemos un polinomio, pues para conservar el monomio se necesita esa homogeneidad de los sumandos. Por ejemplo, si sumamos los monomios:

$$3\,a^2 + 7\,a^2 - 5\,a^2 = 5\,a^2$$

obtenemos otro monomio, que es homogéneo con los sumandos y que es el resultado de la operación de suma indicada. Si en cambio tenemos la siguiente suma:

$$3\,a^2 + 5\,b^3 - 3\,c$$

la suma queda indicada, hemos obtenido un polinomio, y el valor numérico del mismo se determina mediante el conocimiento de las equivalencias numéricas de las letras.

35. — Operaciones con binomios

Por considerarlo de interés para la finalidad de esta obra, incluiremos algunos casos particulares de operaciones con binomios que se presentan con frecuencia en la técnica, como son el caso de la elevación al cuadrado de un binomio y la diferencia de cuadrados, la cual forma también un binomio que se trasforma en otra expresión interesante. Veamos entonces los casos particulares mencionados.

36. — Cuadrado de binomios

La elevación al cuadrado en Algebra ya ha sido estudiada, pero un caso interesante es cuando esa operación se aplica a un binomio, es decir a un conjunto formado por la suma o la diferencia de dos cantidades. Veamos en primer término el caso de la suma.

Tenemos un binomio, o sea una expresión algebraica formada por dos términos, que en este primer caso están sumados, y se desea elevar esa suma al cuadrado, o sea a la segunda potencia. Se tiene:

$$(a + b)^2$$

Para resolver esta operación no hay más que interpretar la operación de potenciación, es decir que debe multiplicarse por sí mismo todo lo que está dentro del paréntesis; o sea que podemos escribir:

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$$

y sabemos que eso es cierto. Para sacar el paréntesis de ambos factores hay que realizar las operaciones indicadas; puede considerarse que las cantidades que están dentro del primer paréntesis son factores comunes de las que están dentro del segundo paréntesis, es decir que para quitar el primer paréntesis debemos multiplicar al segundo por cada uno de los términos del primero:

$$(a + b)\,(a + b) = a\,(a + b) + b\,(a + b)$$

y ahora hacemos las operaciones indicadas en el segundo miembro y se tiene:

$$= a^2 + a\,b + b\,a + b^2$$

y obsérvese que tenemos dos términos iguales, ya que $a\,b$ es lo mismo que $b\,a$, luego, el resultado final es:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

Quiere decir que cada vez que tengamos un binomio de suma y deba elevarse al cuadrado, el resultado será igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Si en vez de ser un binomio de suma hubiera sido uno de diferencia, se tendría el siguiente resultado, haciendo las mismas operaciones anteriores, pero cuidando los signos al hacerlas:

$$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b)$$
$$= a\,(a - b) - b\,(a - b) =$$
$$= a^2 - a\,b - b\,a + b^2$$

debiendo notarse que el último término resultó positivo por ser el producto de dos cantidades negativas. Hay dos cantidades iguales: $a\,b$ y $b\,a$, luego se tiene:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

completamente similar al caso anterior, pero con un signo negativo en el segundo término del resultado.

37. — Diferencias de cuadrados

Hay otro caso particular de binomios que resulta de interés en la Técnica. Se trata de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades, o sea:

$$a^2 - b^2$$

Para determinar el resultado equivalente del binomio anterior, tomemos los dos binomios simples que sirvieron de base para los dos casos planteados anteriormente y multipliquémoslos entre sí:

$$(a + b)\,(a - b)$$

y ahora hagamos las operaciones indicadas, sacando el primer paréntesis:

$$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$$
$$= a^2 - a\,b + b\,a - b^2$$

y observamos que hay dos términos iguales, $a\,b$ y $b\,a$, pero con signo contrario, es decir que se anulan entre sí, quedándonos finalmente que el producto de los dos binomios de suma y diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de sus integrantes, o sea:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

lo que se expresa diciendo que la diferencia de cuadrados de dos cantidades es igual al producto entre la suma y la diferencia de ambas. Esta expresión tiene muchas aplicaciones en los libros técnicos.

38. — Operaciones con polinomios

Los polinomios, como expresiones algebraicas, pueden estar sometidos a operaciones indicadas, las que pueden resolverse antes de dar a las letras sus valores numéricos. Así, podemos sumar y restar dos polinomios, o sea realizar la suma algebraica de los mismos, podemos multiplicarlos, dividirlos y elevarlos a cierta potencia entera o fraccionaria; este último sería el caso de una radicación. Después de las explicaciones sobre factores o simplificación algebraica nos resultará simple cualquier caso de operaciones como las mencionadas. Algunos ejemplos nos servirán de modelo.

Suma algebraica. Es común que los polinomios que están afectados por una operación algebraica se escriban dentro de paréntesis, el cual se quita al realizar las operaciones indicadas. Veamos el siguiente ejemplo de suma algebraica de polinomios:

$$(4\,a + 3\,b - 5\,c) + (3\,a - 2\,b)$$

Y la suma se resuelve directamente quitando los paréntesis, lo cual se puede hacer sin cambiar ningún signo, ya que se trata de una suma:

$$4\,a + 3\,b - 5\,c + 3\,a - 2\,b$$

Y ahora agrupamos los términos homogéneos, que son los que tienen las mismas letras, y al agruparlos resolvemos la operación con cada grupo y colocamos el resultado:

$$(4\,a + 3\,a) + (3\,b - 2\,b) - 5\,c$$

que si resolvemos las operaciones que están dentro de los paréntesis nos queda:

$$7\,a + b - 5\,c$$

y éste es el polinomio resultante de la suma dada anteriormente.

Al solo efecto de que sirva de ejemplo adicional, veamos un caso de resta, es decir suma con signo negativo:

$$(2a - 4b + c) - (2b + 3c)$$

Debemos proceder a quitar los paréntesis, pero en el segundo de ellos hay que cambiar los signos, pues está afectado por un signo negativo; se tiene:

$$2a - 4b + c - 2b - 3c$$

Y ahora agrupando los términos homogéneos tenemos:

$$2a + (-4b - 2b) + (c - 3c)$$

Y al resolver cada paréntesis resulta:

$$2a - 6b - 2c$$

que es el resultado de la resta de polinomios propuesta.

Producto. Un polinomio puede multiplicarse por otro, y como caso particular uno de ellos puede ser un monomio, lo cual simplifica las cosas. Como primer ejemplo tomemos el caso particular mencionado. Sea el producto de un polinomio por un monomio:

$$(4a + 3b - c)\,2a$$

O sea que el polinomio que aparece dentro del paréntesis debe ser multiplicado por el monomio $2a$. Como se ve, se trata de un caso de factor común, el cual ya ha sido estudiado; la operación se realiza multiplicando cada término del polinomio por el monomio:

$$(2a)(4a) + (2a)(3b) - (2a)(c)$$

Siendo de observar que se ha respetado la regla de los signos, pues cuando aparece un signo negativo se ha tomado para el producto. Cada término se multiplica individualmente y se coloca el resultado parcial, formando un nuevo polinomio:

$$8a^2 + 6ab - 2ac$$

y este nuevo polinomio es el resultado del producto dado.

Veamos ahora otro ejemplo de producto de polinomios; sea el siguiente:

$$(4a + 3b - c)(2a - b)$$

Y obsérvese que el polinomio que figura en primer lugar es igual al que teníamos en el ejemplo anterior, lo cual se ha hecho así para facilitar la comprensión del método a seguir. Para multiplicar polinomios se debe multiplicar uno de ellos por cada término del otro y en este caso resulta conveniente tomar el primero, que tiene más términos y multiplicarlo por cada término del segundo, de manera que puede escribirse:

$$2a(4a + 3b - c) - b(4a + 3b - c)$$

Y hemos formado dos grupos de operaciones; cada una se resuelve por partes en la forma como vimos, pues son casos de producto de polinomio por monomio. Tenemos:

primer grupo:

$$(2a)(4a) + (2a)(3b) - (2a)(c) = 8a^2 + 6ab - 2ac$$

segundo grupo:

$$(-b)(4a) + (-b)(3b) - (-b)(c) = -4ab - 3b^2 + bc$$

Y ahora reunimos los dos grupos con sus respectivos signos y formamos el polinomio resultante:

$$8a^2 + 6ab - 2ac - 4ab - 3b^2 + bc$$

en el cual se observan algunos términos homogéneos que pueden agruparse para su simplificación; son los términos que tienen las letras ab:

$$8a^2 + 2ab - 2ac - 3b^2 + bc$$

Y el anterior es el resultado del producto de polinomios que se propuso.

Cociente. Si bien pueden resolverse casos de cociente entre polinomios, en la práctica el único caso que se presenta con frecuencia es el de la división de un polinomio por un monomio; los otros quedan para los que gustan de la ejercitación matemática pero escapan al objetivo de este libro. Para poder dividir un polinomio por un monomio, cada término del primero debe ser divisible por el monomio; veamos un ejemplo:

$$\frac{6a^2 - 3ab + 4ab^2}{2a}$$

Y vemos enseguida que todos los términos del polinomio son divisibles por el monomio; hacemos la división individual y tenemos:

$$\frac{6a^2}{2a} - \frac{3ab}{2a} + \frac{4ab^2}{2a}$$

Y ahora, resolviendo cada cociente se pone el resultado:

$$3a - 1{,}5\,b + 2b^2$$

Que es el polinomio resultante; obsérvese que los coeficientes numéricos no necesitan ser divisibles en forma exacta, pues se coloca el cociente en forma decimal o en forma de quebrado.

39. — Ecuaciones algebraicas

Ya hemos visto las operaciones fundamentales del Algebra. Sabemos que la suma y la resta son operaciones inversas, así como la multiplicación con respecto a la división. En virtud de esas consideraciones, se pueden resolver las más simples ecuaciones que se presentan en la Técnica.

Una ecuación o una fórmula está siempre formada por una igualdad, es decir consta de dos miembros iguales entre sí, separados por el signo *igual* (=). Así, si queremos expresar la más simple ecuación, pondremos:

$$A = 4$$

La cantidad A es el primer miembro de la ecuación, y el 4 forma el segundo miembro. Se llama igualdad, porque las cantidades o grupos de cantidades que están a ambos lados del signo (=) son iguales entre sí. En aritmética podríamos dar como ejemplo de ecuación simple, el siguiente:

$$2 + 2 = 4$$

En la cual el primer miembro está formado por dos términos, cada uno de los cuales es un 2. El segundo miembro es un 4. El primer miembro es siempre igual al segundo.

Las cantidades separadas por signos de *suma* (+) o de *resta* (—) se llaman términos y las que están separadas por signos de multiplicación, factores. Ya sabemos que en el Algebra se omite el signo de multiplicar entre dos o más letras, pero siguen llamándose factores aun en esas condiciones. Así, si escribimos:

$$A\,B + 4\,D - 8\,z\,M = 5\,b + f$$

Tendremos formada una ecuación algebraica. El primer miembro es:

$$A\,B + 4\,D - 8\,z\,M$$

Y está compuesto por tres términos, cada uno de los cuales tiene varios factores. El término $A\,B$ tiene dos factores, que son A y B. El término 4 D tiene dos factores, que son 4 y D, es decir factores numéricos y letras; el término final del primer miembro está formado por 3 factores: 8, z y M.

El segundo miembro de la ecuación anterior tiene dos términos. El primero tiene dos factores: 5 y b y el segundo tiene una sola cantidad, la f.

El orden de los términos de una igualdad no altera la ecuación, siempre que se conserven los signos de cada uno y se los deje en el miembro en que estaban. Ya veremos cómo se los puede cambiar de miembro. Así, en la ecuación anterior si escribimos:

$$4\,D - 8\,z\,M + A\,B = f + 5\,b$$

La ecuación no habrá alterado en lo más mínimo y se sigue teniendo una igualdad. Lo mismo podemos hacer con los factores de un término, alterando su ordenación, sin que se afecte el resultado. Por ejemplo, la ecuación anterior no altera si se escribe:

$$4\,D - 8\,M\,z + B\,A = f + b\,5$$

40. — Resolución de ecuaciones

En una ecuación algebraica hay varias cantidades, formadas por letras y números, agrupadas en términos. Puede haber un solo término a cada lado del signo igual (=). Cada término puede tener uno o varios factores o estar formado por un cociente. Para poder utilizarla en la técnica, es preciso que se conozcan todos los valores menos uno, es decir que se deben tener los equivalentes numéricos de las letras de cada término, pudiendo haber una letra cuyo valor se desconozca. Esa letra se llama *incógnita*.

Se llama *resolver* una ecuación, a la operación que consiste en obtener la incógnita solamente en el primer miembro y todos los demás términos con sus factores en el segundo miembro. Recién entonces se reemplaza cada letra por su equivalente y se pueden hacer las operaciones aritméticas indicadas, de manera que se obtendrá un resultado final que será el valor numérico de la incógnita.

Pongamos un ejemplo. Si una ecuación resuelta ha quedado así:

$$b = 3\,A + 2\,B - 5\,z$$

Y sabemos que A vale 4, que B vale 12 y que z vale 6, podemos calcular el valor de la incógnita, que es b. En efecto, reemplazando los valores numéricos en lugar de cada letra, se tiene:

$$b = 3 \times 4 + 2 \times 12 - 5 \times 6$$

Y vemos que se pueden ahora hacer las operaciones aritméticas pues cada término es un simple producto. Operando queda:

$$b = 12 + 24 - 30 = 36 - 30 = 6$$

con lo que se ha obtenido el valor de b, que resultó 6.

No es necesario que todas las operaciones indicadas sean producto y sumas, pues puede haber cocientes (divisiones), radicaciones, etc. Pongamos para aclarar dudas un ejemplo más complejo. Supongamos que después de resuelta la ecuación, lo que suele llamarse también *despejar la incógnita*, se tiene:

$$k = A + 2\,b^2 - \frac{u + c}{3\,d} + \sqrt{F}$$

Con lo que nos ha quedado una ecuación bastante complicada. Sin embargo, no ofrece dificultades insalvables para encontrar el valor de la incógnita k. Se comienza por averiguar los valores de las cantidades que son letras, cosa que constituyen los *datos* del problema. Supongamos que esas letras tienen los siguientes valores:

$A = 20$	$c = 12$
$b = 5$	$d = 2{,}5$
$u = 18$	$F = 36$

Con ellos podemos encontrar el valor de k enseguida. Empezamos por colocar en el lugar de cada letra su equivalente numérico, colocando signos de multiplicar entre números, pues las letras no los necesitan, pero éstos sí. Se tiene:

$$k = 20 + 2 \times 5^2 - \frac{18 + 12}{3 \times 2{,}5} + \sqrt{36}$$

Y acto seguido se pueden empezar a realizar las operaciones indicadas, pero respetando algunas reglas: Primero se resuelven las operaciones de cada término y luego se suman o restan los términos. Esto es muy importante, pues en el ejemplo dado no podemos sumar el primer 20 con el 2 que le sigue, pues ese 2 afecta al 5. Tampoco se puede multiplicar el 2 por el 5 del segundo término, pues el 5 está elevado a la segunda potencia, y esta última operación debe hacerse antes. En el tercer término hay un cociente, pero no se puede dividir el 18 por 3, por ejemplo, porque primero hay que resolver todo el numerador y aparte, todo el denominador, dividiendo recién después.

Así, en ecuaciones complejas, primero se hacen las operaciones de radicación y potenciación, que afectan a algunas cantidades. Luego se hacen los productos indicados en cada término. Los cocientes se resuelven cuando se ha obtenido en el numerador y en el denominador una sola cantidad. Y finalmente se suman o restan, según cuál sea el signo, los diversos términos.

En el ejemplo anterior, debemos elevar al cuadrado el número 5, lo que da: $5^2 = 25$; luego extraemos la raíz cuadrada de 36, y nos da: 6. Ahora reemplazamos en la ecuación esos resultados:

$$k = 20 + 2 \times 25 - \frac{18 + 12}{3 \times 2{,}5} + 6$$

Pudiendo hacerse enseguida otras operaciones. Por ejemplo, para poder resolver el cociente, es menester calcular primero su numerador y su denominador. El numerador tiene una suma, que da 30, y el denominador tiene un producto que da 7,5. Colocamos esos resultados en la fórmula dada:

$$k = 20 + 2 \times 25 - \frac{30}{7{,}5} + 6$$

Y ahora puede hacerse la división del 30 por el 7,5 que resulta 4. Además, deben hacerse los productos de los factores de cada término. Sólo tenemos uno, que es el producto de 2×25 del segundo término, que resulta 50. Colocamos todo eso en la ecuación:

$$k = 20 + 50 - 4 + 6 = 72$$

Y vemos que se puede resolver de inmediato, dando $k = 72$, que era el valor buscado. Como vemos, la resolución de una ecuación no es tan difícil, pero advertimos que en la Técnica es más fácil todavía, pues pocas veces se presentan ecuaciones o fórmulas tan complicadas como la que presentamos como muestra. En realidad casi siempre se trata de unos productos, cocientes, sumas y restas, pero en reducida cantidad. Hay que realizar las operaciones en el orden en que deben hacerse y no seguir caminos equivocados. En el ejemplo anterior hemos citado los errores más frecuentes en que se incurre.

Para resolver ecuaciones hay que seguir unas cuantas reglas importantes, aprenderlas bien, y no se presentarán dificultades de ninguna índole. Esas reglas tienen una deducción muy lógica y se basan en las operaciones de carácter inverso. Veamos cuáles son las más usuales de acuerdo con las necesidades que se presentan en las fórmulas técnicas.

41. — Reglas de resolución

1º) *El orden de los dos miembros de una igualdad no interesa pues pueden invertirse sin que se altere.* Por ejemplo, se puede escribir:

$$2A + C = k$$

Que sería una ecuación donde la incógnita está en el segundo miembro. Sin inconvenientes la pasamos al primero, colocando todo el primer miembro en el lugar del segundo:

$$k = 2A + C$$

Esto es importante, porque a veces se presenta el caso que al resolver una ecuación es más fácil pasar la incógnita al segundo miembro, y se hace así pasándola después al primero, invirtiendo los dos miembros de la igualdad.

2º) *Los términos de un miembro de una igualdad, afectados del signo de suma o de resta pasan al otro miembro con signo contrario,* es decir los que se suman pasan restándose, y los que se restan, sumándose. Si se sacan todos los términos de un miembro, en el mismo quedará un cero, pues se han restado todos, y no queda nada.

Así, en la igualdad siguiente, cambiaremos de miembro algunos términos:

$$3B + 4C - 5F = R - P + M$$

Supongamos que queremos pasar el término $3B$ al segundo miembro y el P al primero. El de la B se está sumando, pues tiene signo positivo; luego pasa al otro miembro con signo negativo. El de la P tiene signo negativo, y pasará al primer miembro con signo positivo:

$$4C - 5F + P = R + M - 3B$$

Y la ecuación no ha alterado, pues sigue siendo una igualdad.

3º) *Los factores de un miembro pasan al otro como divisores, y los divisores como factores.* Claro está que para poder hacerlo no debe tratarse de los factores propios de un término, sino los factores de todo el miembro. Así, en la ecuación:

$$3H + 5R = 67G$$

No se puede pasar al segundo miembro el 3 que es un factor del primer término porque no es un factor de todo el miembro, sino sólo de un término. Pero, en cambio, el 67 que es un factor de todo el segundo miembro puede pasarse al primero como divisor y afectará a todos los términos del primer miembro:

$$\frac{3H + 5R}{67} = G$$

Y nada cuesta suponer que hemos hecho eso porque G era la incógnita de la ecuación, y queríamos despejarla, es decir resolver la ecuación. Aquí vemos un caso donde convenía quedarnos con la incógnita despejada en el segundo miembro, pues después la podemos pasar el primero, lo que haríamos simplemente así:

$$G = \frac{3H + 5R}{67}$$

4º) *Si la incógnita está afectada de una operación de potenciación o radicación, para despejarla hay que realizar con el otro miembro la operación inversa.* Así por ejemplo si después de despejada la incógnita, vemos que ella está elevada al cuadrado, no hay más que extraer la raíz cuadrada del otro miembro para eliminar esa potenciación; supongamos que se tiene:

$$k^2 = 4T - P$$

Y que k es la incógnita. Para calcular su valor, se elimina el cuadrado extrayendo la raíz cuadrada del segundo miembro:

$$k = \sqrt{4T - P}$$

Y si en cambio, la incógnita despejada estuviera afectada por una operación de radicación, habría que elevar el otro miembro a la potencia de igual índice que el de la raíz, para eliminar ésta. Así, por ejemplo si se tiene:

$$\sqrt{4R} = U - L$$

Basta elevar el segundo miembro al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada:

$$4R = (U - L)^2.$$

Vemos que se necesitan nuevamente los paréntesis, para indicar que lo que se eleva al cuadrado es todo el miembro, y no la U o la L solamente. Para resolver la ecuación, se despeja totalmente la incógnita R pasando el factor que la afecta al segundo miembro, como divisor:

$$R = \frac{(U - L)^2}{4}$$

Y basta conocer los equivalentes numéricos de U y de L para encontrar el valor de R.

Día 5

Lo último que hemos visto y que podría llamarse introducción al cálculo literal o también nociones de Algebra elemental, es tan interesante que no necesita ponderación; a poco que el lector lo haya leído, habrá sentido que ya las fórmulas matemáticas que vio en infinidad de libros técnicos dejaban de ser misteriosas y comenzaban a tener explicación. Las letras en Matemáticas no forman un lenguaje difícil sino una manera de plantear las cosas y hemos visto que podemos operar con ellas si se siguen algunas reglas fijas y claras. Una fórmula matemática es un problema completo en el cual hay una cantidad de datos conocidos y una cantidad desconocida que debe calcularse y para esto último basta saber realizar operaciones de Aritmética.

Pruebe el lector de tomar un libro que contenga fórmulas, cualquiera que tenga en su biblioteca y que no usaba por no entenderlo; al ojearlo ahora lo encontrará distinto, las fórmulas las verá como frases explicativas y guía para resolver los problemas. Y eso que todo lo que hemos hecho es ver un comienzo, una pequeña introducción a las Matemáticas literales.

Entraremos ahora en el estudio de las dimensiones y las unidades en que ellas se miden, con referencias a las usuales en nuestro país y a las que se usan en otras partes. Y, como aplicación inmediata, aprendemos a calcular longitudes, áreas y volúmenes de las figuras y cuerpos geométricos más conocidos.

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA

Para entrar en el estudio de la Geometría, limitada al cálculo de longitudes, superficies y volúmenes, que será nuestro próximo tema, es menester hacer un previo análisis de las unidades que se emplean para dichas magnitudes. Si bien no puede pensarse que el lector ignore que el metro es la unidad de medida de longitudes, por ejemplo, es muy conveniente fijar detallada y precisamente todas las unidades y aun dar las equivalencias con ciertas medidas extranjeras con las que se encontrará frecuentemente; citemos el caso de la *pulgada* que encontramos como unidad de medida de longitudes pequeñas en los libros en idioma inglés.

Con las justificaciones y aclaraciones precedentes, podemos encarar la descripción de las unidades que integran el Sistema Métrico Decimal y que incluyen las unidades básicas o fundamentales, los múltiplos y submúltiplos de las mismas y las derivadas o accesorias.

42. — Unidades de longitud

Nuestro sistema de medidas se basa en un patrón de longitudes, que fue construido tomando como base la medición de una cuarta parte del meridiano terrestre. Esa medida se la dividió por 10 millones y resultó una barra de cierta longitud, que se llamó: *metro*. Con esa base se formó el *sistema métrico decimal* para toda clase de mediciones.

Con ello se pensó desterrar la antigua anarquía imperante en los sistemas de medición de cada país, pero sin embargo subsisten aún viejas unidades de medidas que son distintas al metro. La vara, la yarda, etc., son ejemplos característicos. El inconveniente de las unidades de medida que no pertenecen al sistema métrico decimal aparece en las fórmulas técnicas, porque hay que introducir factores de corrección. Por tal motivo es muy conveniente reducir todas las fórmulas a unidades derivadas del metro, y evitar esas correcciones.

El metro tiene múltiplos y submúltiplos, que pueden usarse a voluntad cuando resulte conveniente. Por ejemplo, para medir distancias entre ciudades, sería incómodo andar hablando de 150.000 metros, por tenerse cifras muy grandes. En ese caso es preferible usar el Kilómetro, que equivale a 1000 metros y esa distancia mencionada sería de 150 Kilómetros. Lo mismo podríamos decir en el caso de las piezas pequeñas de mecánica, que para medirlas en metros habría que utilizar decimales con muchos ceros. Empleando el milímetro, que es la milésima parte del metro, se soluciona el inconveniente.

También con el metro y sus derivados se forman las medidas de superficie y volumen. Con sus respectivos múltiplos y submúltiplos. Y la gran ventaja del sistema métrico decimal estriba en que para medir capacidades, se usa una unidad derivada de las medidas de longitud, como veremos.

Conviene familiarizarse con las medidas de longitud y sus derivados, así como con las abreviaturas que las designan, pues en la práctica no se acostumbra a escribir palabras largas como Kilómetro, sino que se abrevia Km., simplemente. Veamos cuáles son esas unidades:

Unidad fundamental:

	1	metro	..: m.

Múltiplos:

1 Kilómetro .	1000	metros	..: Km.
1 Hectómetro	100	metros	..: Hm.
1 Decámetro .	10	metros	..: Dm.

Submúltiplos:

1 decímetro	0,1	metro	...: dm.
1 centímetro .	0,01	metro	..: cm.
1 milímetro ..	0,001	metro	..: mm.
1 micrón	0,000001	metro	..: µm.

De la observación de la tabla anterior se ve que para usar múltiplos o submúltiplos de una unidad, no hay más que usar prefijos con el nombre de la unidad fundamental. Así, a cualquier unidad se le agrega el prefijo Kilo, y se la convierte en una unidad 1.000 veces mayor. Conviene entonces acostumbrarse a esos prefijos, porque los usaremos con frecuencia:

Mega	1.000.000	abrev.	M
Kilo	1.000	"	K
Hecto ...	100	"	H
Deca	10	"	D
deci	$\frac{1}{10}$	"	d
centi	$\frac{1}{100}$	"	c
mili	$\frac{1}{1.000}$	"	m
micro ...	$\frac{1}{1.000.000}$	"	µ

La costumbre hace usar con preferencia algunas unidades derivadas, dejando de lado las fundamentales. Así para distancias geográficas se emplea el Km.; para medidas de piezas mecánicas utilizamos el mm.; para el magnetismo se usa mucho el cm.; etc. Hay que habituarse a conocer las abreviaturas, porque es casi la única forma como se las escribe.

Conviene conocer las unidades extranjeras que difieren de las del sistema métrico decimal, para poder efectuar las reducciones en el caso necesario. Las más usuales entre las de longitud son, con sus equivalencias:

1 Pie (′)	0,305 m		305 mm
1 Pulgada (″)	0,0254 m		25,4 mm
1 Vara	0,866 m		86,6 cm
1 Yarda	0,914 m		91,4 cm
1 Braza	1,83 m		183 cm
1 Legua	5.196 m		5,196 Km
1 Milla inglesa ...	1.609 m		1,609 Km
1 Milla marina ...	1.853 m		1,853 Km

De modo que conociendo una medida expresada en cualquiera de las unidades anteriores, para pasar al sistema métrico decimal no hay más que multiplicarla por la equivalencia numérica respectiva. Así, si tenemos que una madera tiene un espesor de 2 pulgadas (2"), y queremos pasar a la medida en milímetros, como es correcto, multiplicamos por la equivalencia:

$$2 \times 25,4 = 50,8 \text{ mm.}$$

43. — Medidas de superficie

Para formar la unidad básica de medidas de superficie, el sistema métrico decimal toma un cuadrado de un metro de lado y a esa superficie la toma como unidad, llamándola: *metro cuadrado*. Una superficie cualquiera se calcula determinando cuántas veces cabe en ella la superficie unidad, es decir, averiguando cuántos metros cuadrados tiene. Claro que también se usarán los múltiplos y submúltiplos, en la misma forma como en el caso de las longitudes.

En cada caso tendremos la designación de la unidad, la aplicación del prefijo para con-

vertirla en un múltiplo o en un submúltiplo, el símbolo para distinguirla mediante una abreviatura y hasta la equivalencia con las unidades extranjeras:

1 Kilómetro cuadrado tiene 1.000.000 m^2 y se abrevia Km^2.

1 Hectómetro cuadrado tiene 10.000 m^2 y se abrevia Hm^2.

1 Decámetro cuadrado tiene 1.000 m^2 y se abrevia Dm^2.

1 metro cuadrado tiene 100 dm cuadrados (100 dm^2).

1 metro cuadrado tiene 10.000 cm cuadrados (10.000 cm^2).

1 metro cuadrado tiene 1.000.000 mm cuadrados (1.000.000 mm^2).

1 decímetro cuadrado tiene 100 cm cuadrados y 10.000 milímetros cuadrados.

Vemos que cada múltiplo está relacionado con el siguiente por el factor 100, como corresponde por multiplicar 10×10, ya que se trata de superficies.

En cuanto a las equivalencias con medidas extranjeras de superficie, son las derivadas de las de longitud ya conocidas.

Las más usuales son:

1 Pulgada cuadrada ..	6,45 cm^2	645 mm^2
1 Pie cuadrado	0,0929 m^2	929 cm^2
1 Vara cuadrada	0,75 m^2	75 dm^2
1 Yarda cuadrada	0,836 m^2	83,6 dm^2
1 Milla ingl. cuadrada	2,6 Km^2	

De modo que si se presentan dimensiones o superficies de piezas u objetos expresados en las unidades que no pertenecen al sistema métrico decimal, puede pasarse sin ninguna dificultad a nuestro juego de unidades con sólo multiplicar por la equivalencia respectiva, Así, si una plancha de chapa de hierro tiene una superficie de 20 pies cuadrados, diremos que esa chapa tiene una superficie de:

$$20 \times 0{,}0929 = 1{,}858 \text{ m}^2$$

44. — Medidas de volumen

Un cuerpo cualquiera ocupa un cierto volumen en el espacio. Para medirlo se ha adoptado una unidad de medición, que se formó tomando un cubo de un metro de lado. Luego, para determinar el volumen del cuerpo se determina cuántas veces cabe en él la unidad y se expresa el número obtenido, diciendo que el cuerpo ocupa un volumen de tantos metros cúbicos. Claro que pueden usarse los múltiplos y submúltiplos de la unidad básica de volumen, en la misma forma como se hacía para las longitudes y las superficies, adoptando la equivalencia y colocando el prefijo respectivo al nombre de la unidad, el metro cúbico, que abreviamos m^3.

En la determinación de volúmenes son poco usados los múltiplos del metro cúbico, siendo más comunes los submúltiplos; por tal motivo consideraremos estos últimos. También tendremos medidas extranjeras de volumen, cada una de las cuales tendrá su equivalencia con cualquiera de las del sistema métrico decimal. Para reducirlas no habrá más que multiplicar por esa equivalencia. Veamos cuáles son los submúltiplos del metro cúbico:

$$1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ dm}^3 = 1.000.000 \text{ cm}^3$$
$$1 \text{ dm}^3 = 1.000 \text{ cm}^3 = 1.000.000 \text{ mm}^3$$
$$1 \text{ cm}^3 = 1.000 \text{ mm}^3$$

Es decir, que cada submúltiplo está relacionado con el inmediato superior o inferior por un factor 1.000. Eso es evidente, puesto que cada prefijo tiene un valor 10 veces superior o inferior al inmediato y como en el volumen se multiplican tres veces entre sí, es decir, se elevan al cubo y el cubo de 10 es 1.000 resulta lo antedicho.

Las medidas extranjeras de volumen son derivadas de las respectivas de longitud y superficie, siendo las más comunes, con sus respectivas equivalencias:

1 Pulgada cúbica	16,386 cm^3
1 Pie cúbico	0,0283 m^3
1 Yarda cúbica	0,0764 m^3

De manera que una cantidad que represente un volumen expresado en cualquier unidad extranjera, para reducirla al sistema métrico decimal no hay más que multiplicarla por la equivalencia. Así, si tenemos 50 pies cúbicos de arena, podemos reducirlos a metros cúbicos de la siguiente manera:

$$50 \times 0{,}0283 = 1{,}415 \text{ m}^3$$

Con las unidades y sus respectivos múltiplos y submúltiplos que forman el sistema de medidas descriptas podrían resolverse todos los problemas de Geometría, pero el sistema métrico decimal tiene otras derivaciones que

conviene conocer pues se presentarán a menudo en la Técnica. Nos referimos a las medidas de capacidad y de peso, que son derivados o complementarias de las de volumen. En la práctica se presenta muy a menudo la necesidad de completar un problema de Geometría, calculando la capacidad de un depósito conociendo su volumen, o determinar el peso de un objeto conociendo también su volumen o sus dimensiones.

45. — Medidas de capacidad y peso

El sistema métrico decimal enlaza las medidas de volumen, capacidad y peso en una forma ingeniosa. Toma la unidad derivada del metro cúbico que es 1.000 veces más chica que él, es decir el dm^3 y construye un cubo con ese volumen, es decir, con un dm por lado. A la capacidad de ese cubo la designa con el nombre de un *litro*. Esta es la unidad de capacidad, el litro. Tiene sus múltiplos y submúltiplos, que se escriben anteponiéndoles un prefijo, en la misma forma que para las otras medidas.

Para el peso, se toma un cubo de un centímetro de lado, que tiene un volumen de 1 cm^3 y se lo llena de agua destilada. Se pesa y esa cantidad es la unidad de peso, que se llama *gramo*. También se pueden obtener unidades derivadas anteponiendo los prefijos conocidos.

Las unidades más usuales derivadas del litro son:

1 Hectolitro	Hl	 que vale	100 litros
1 Decalitro	Dl	 que vale	10 litros
1 decilitro	dl	 que vale	0,1 litro
1 centilitro	cl	 que vale	0,01 litros

De modo que es fácil determinar, de acuerdo con lo que antecede, que un litro tiene 10 decílitros, o 100 centílitros, etc.

Para las medidas de peso, tendremos los múltiplos y submúltiplos del gramo, cuyas equivalencias con éste serán:

1 Kilogramo .:	Kg	que vale	1.000 gramos (g)
1 Hectogramo:	Hg	que vale	100 gramos (g)
1 Decagramo .:	Dg	que vale	10 gramos (g)
1 decigramo ..:	dg	que vale	0,1 gramos (g)
1 centigramo .:	cg	que vale	0,01 gramos (g)
1 miligramo ..:	mg	que vale	0,001 gramos (g)

De las cuales la más usada es el Kg por ser el gramo una unidad algo pequeña. En la práctica se acostumbra a dar el peso de las cosas en Kg.

Las unidades extranjeras más usadas de capacidad o de peso, tienen los mismos países de origen que las de longitud, y sus equivalencias son:

1 Galón inglés	4,54 litros
1 Galón U. S. A. ..	3,785 litros
1 Libra	454 gramos
1 Onza	28,3 gramos
1 Quintal	45,36 Kilogramos

De manera que es fácil determinar cuál será la capacidad en litros de un recipiente inglés de 2 galones, por ejemplo, pues basta multiplicar por la equivalencia respectiva:

$$2 \times 4{,}54 = 9{,}08 \text{ litros}$$

46. — Peso específico

Una vez determinada la relación entre las medidas de capacidad y peso o también entre las de volumen y peso, falta detallar cómo se determina el peso de una sustancia cualquiera que no sea el agua. Hemos dicho que un centímetro cúbico de agua destilada pesa un gramo. También puede decirse por simple extensión de esta definición que 1.000 cm^3 de agua pesan 1.000 gramos o sea que 1 dm^3 pesa 1 Kg.

Para otros cuerpos que no sean el agua también puede relacionarse el volumen con el peso, pero aclarando que un centímetro cúbico no pesará ya un gramo sino una cantidad distinta. Se puede fijar como base para los cálculos el peso de un centímetro cúbico de cualquier sustancia, expresado en gramos, y con él calcular el peso de cualquier otro volumen.

Esa cantidad, peso en gramos de un centímetro cúbico, o peso en Kilogramos de un decímetro cúbico, se llama *peso específico*. Se insiste en que el peso de la unidad de volumen coincide numéricamente, si se toma en gramos por centímetro cúbico o en Kilogramos por decímetro cúbico. Diremos pues, que basta disponer de una tabla que suministre los pesos específicos de las sustancias más usuales para poder aplicarlo en la práctica.

47. — Estudio de las figuras planas

En general, la Geometría comprende el estudio de las longitudes de las líneas rectas y curvas, el cálculo de las superficies, de los volúmenes, y en general, las medidas de las cosas. Así, enseña cómo se determina la superficie de un campo o de un pedazo de papel;

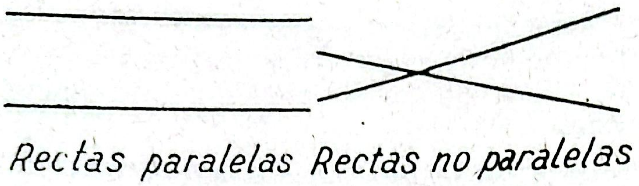


FIG. 1. – Dos rectas en el plano pueden ser paralelas o cortarse.

la cantidad de agua que cabe en un tanque, la distancia que hay entre los dos vértices opuestos de un cuadrado, y una infinidad de cosas más. La ordenación más lógica es comenzar por el estudio de las figuras planas, para pasar en segundo término a los cuerpos geométricos regulares.

Un plano es una superficie cuyos puntos conservan siempre una misma dirección; el nivel de los líquidos, la tabla de una mesa, el piso, etc., pueden considerarse como planos. Si sobre un plano dibujamos líneas, ellas pueden ser rectas o curvas. Las rectas conservan una alineación de todos sus puntos y las curvas cambian constantemente esa alineación.

Comencemos por estudiar las líneas rectas. Trazando sobre un plano dos líneas rectas pueden ocurrir dos cosas: que conserven entre ellas siempre la misma distancia o que no la conserven. En el primer caso se llaman *rectas paralelas* y en el segundo *no paralelas* u *oblicuas*. Dos rectas oblicuas se cortan entre sí, como se ve en la Fig. 1, aunque el punto de encuentro quede más lejos, fuera del papel.

48. — Angulos

Cuando dos rectas se cortan, el espacio, zona o región que queda entre ellas se llama *ángulo*. En la Fig. 2 ese ángulo formado por dos rectas a y b que se cortan lo hemos denominado α (alfa) ya que para los ángulos se usa generalmente una letra griega.

Un ángulo puede ser *agudo*, *obtuso* o *recto*. Es más fácil definir primero el recto, y decir luego que ángulo agudo es aquél menor que el recto y obtuso el mayor que uno recto. Entonces definimos como *ángulo recto* el formado por dos *rectas perpendiculares* entre sí, o sea que están en escuadra. Por ejemplo, la pared es perpendicular al piso, una torre es perpendicular al suelo.

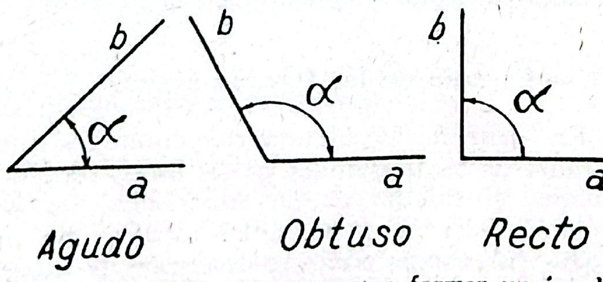


FIG. 2. – Dos rectas que se cortan forman un ángulo

Los ángulos tienen una medida, que es el *grado*. En el próximo capítulo veremos esto en detalle porque es muy importante en la Técnica. Por ahora nos basta saber que cuando una recta es perpendicular a otra forma con ella un ángulo recto, que tiene 90 grados.

49. — Figuras geométricas planas

Si sobre un plano trazamos una línea curva, la misma puede formar una figura cerrada, es decir que partiendo de cualquier punto de la curva y recorriéndola llegamos nuevamente al punto inicial. Con líneas rectas no se pueden trazar figuras cerradas, ni aunque se pongan dos rectas. Dos rectas forman un ángulo, pero no una figura cerrada.

El número mínimo de rectas para formar una figura cerrada es tres, y con ella se tiene la figura geométrica más simple, que tiene tres lados y tres ángulos. Se llama *triángulo* y su estudio nos ocupará detalladamente más adelante (capítulo 9) por interesar especialmente en la Electrotecnia.

Llamamos entonces figuras geométricas a las formas cerradas, ya sea con rectas o con curvas. Como esas figuras están sobre un plano, se llaman también *figuras planas*. De ellas interesa especialmente conocer cuál es la superficie encerrada por su contorno, es decir la medida de esa superficie, y la longitud del contorno o sea la medida del *perímetro*.

$P =$ perímetro
$S =$ superficie

50. — Superficie de las figuras planas

Triángulo

Dijimos que la cantidad mínima de líneas a trazar para obtener una figura cerrada es tres, con las que se forma un *triángulo*, según la Fig. 3. Los tres puntos A, B y C son los de encuentro de las rectas que forman los lados, y se llaman *vértices*. El lado AB sobre el cual se puede considerar apoyado al triángulo, se llama *base* y se le asigna una letra b. Si desde el vértice opuesto a la base, el C, bajamos una perpendicular, o sea una recta que esté en escuadra con la recta base, esa perpendicular se llama *altura* del triángulo.

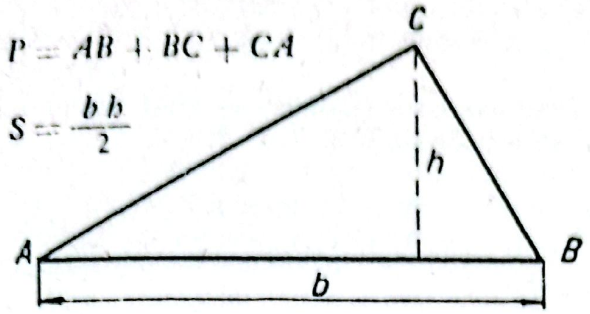


FIG. 3. – Triángulo, con indicación de sus dos medidas principales: base y altura.

Cuadrado

Si trazamos sobre un plano dos rectas paralelas, es decir, dos rectas que conserven una idéntica distancia entre ambas en todo su recorrido y otras dos paralelas que sean perpendiculares a las primeras y que guarden entre sí la misma distancia que aquéllas, se forma una figura cerrada como la ilustrada en la Fig. 4, que se llama *cuadrado*. La característica sobresaliente del cuadrado es que sus cuatro lados son iguales, siendo paralelos los opuestos y perpendiculares los inmediatos.

El cuadrado tiene cuatro vértices, en cada uno de los cuales se forma un ángulo recto, de 90°.

Rectángulo

Si los dos pares de líneas paralelas que utilizamos para dibujar el cuadrado conservan la propiedad de ser perpendiculares entre sí, pero tienen distinta distancia, es decir, la distancia entre las dos primeras paralelas es diferente a la que hay entre el otro juego, se forma una figura como la que se ve en la Fig. 5. Los dos lados horizontales son paralelos, y también lo son los dos verticales.

La medida del lado sobre el cual se puede suponer apoyado al *rectángulo* se llama *base* (b) y la distancia entre los dos lados horizontales se llama *altura* (h).

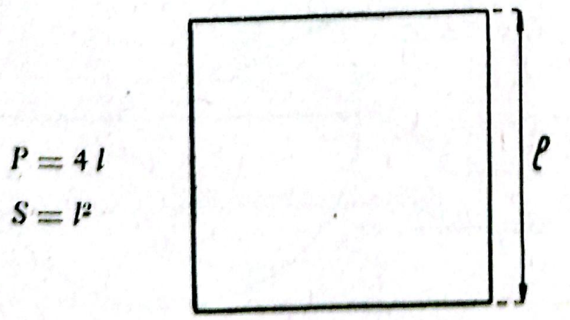


FIG. 4. – Cuadrado, con indicación de la longitud de uno de sus lados.

Paralelogramo

Imaginemos un rectángulo al que le dejamos fijos los dos lados horizontales, pero inclinamos sus dos verticales, manteniéndolos paralelos entre sí. Se formará la Fig. 6, no cumpliéndose ya la propiedad de tener los cuatro ángulos de 90° o sea rectos.

Trapecio

Dejemos al rectángulo sus dos lados horizontales, paralelos, pero tomemos los dos verticales y démosles cualquier inclinación, per-

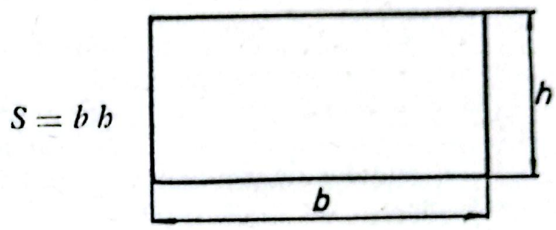


FIG. 5. – Rectángulo, con indicación de las dimensiones de la base y la altura.

diendo el paralelismo que había entre ellos. Se formará la Fig. 7 llamada *trapecio*. El lado inferior, sobre el que puede suponerse que apoya la figura, se llama *base mayor* y el superior, paralelo al anterior: *base menor*. La distancia entre las dos bases se llama altura.

Para calcular la superficie encerrada por los cuatro lados de un trapecio no interesa la inclinación de sus laterales, sino sólo saber las medidas de la base mayor B; de la base menor b, y de la altura h.

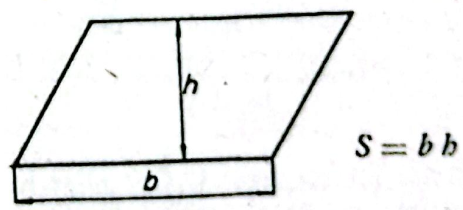


FIG. 6. – Paralelogramo, ilustrando la forma de tomar las medidas de la base y la altura.

Rombo

Si el paralelogramo que vimos en la Fig. 6 tuviera sus cuatro lados iguales, se formaría una figura como la 8. Sus lados son paralelos de a pares, es decir los opuestos, pero no tiene ángulos rectos. Las líneas que unen dos vértices opuestos como los A y B o los C y E, se llaman diagonales, y en particular, la más larga se denomina: *diagonal mayor* y la más corta: *diagonal menor*.

$$S = \frac{B+b}{2}\,h$$

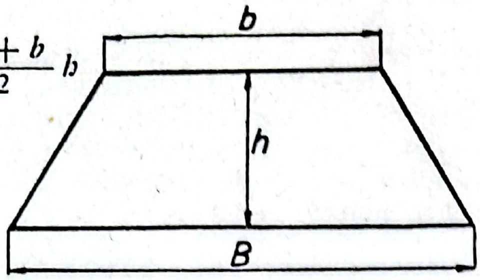


Fig. 7. – Trapecio, indicando las dos bases y la altura.

Cuadrilátero irregular

Una figura formada por cuatro lados entre los cuales no se cumple ninguna condición de paralelismo o perpendicularidad, como la de la Fig. 9 por ejemplo, se llama *cuadrilátero irregular.* Sus ángulos tienen cualquier medida y sus lados pueden ser todos distintos.

Para calcular el área encerrada por los cuatro lados, se divide a la figura en dos triángulos uniendo con una recta dos vértices opuestos, como los B y D de la figura. Una vez hecho eso, se bajan desde los otros dos vértices opuestos las perpendiculares a la diagonal trazada. Veamos lo que ha sucedido:

$$S = \frac{D\,d}{2}$$

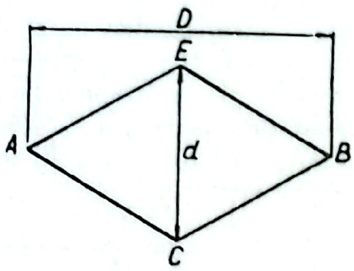


Fig. 8. – Rombo, con indicación de la longitud de las diagonales.

Entre los vértices A, B y D se ha formado un triángulo de altura h_1, de manera que su área será:

$$S_1 = \frac{b\,h_1}{2}$$

Y entre los vértices C, B y D se ha formado otro triángulo de igual base, b, o sea la medida de la diagonal BD, pero de altura h_2. Su área será:

$$S_2 = \frac{b\,h_2}{2}$$

Y el área total del cuadrilátero será la suma de las áreas de los dos triángulos, o sea S_1 y S_2. Sumando, tenemos:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{b\,h_1}{2} + \frac{b\,h_2}{2}$$

Esta expresión podría ser motivo de una simplificación, o sea:

$$S = \frac{b}{2}\,(h_1 + h_2)$$

Círculo

Si tomamos un compás, y abrimos sus brazos hasta que los extremos disten una medida R, llamada *radio*, se puede trazar una curva como la que se ve en la Fig. 10, que se llama *circunferencia.* La distancia entre dos puntos opuestos se llama *diámetro* y es el doble del radio, es decir:

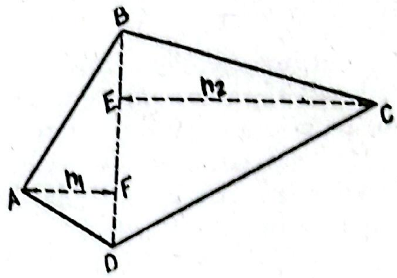


Fig. 9. – Cuadrilátero irregular, subdividido en triángulos al efecto de calcular su superficie.

$$D = 2\,R$$

Siendo D el diámetro indicado en la figura. Tenemos así la primera figura tomada por una línea curva. La longitud de esa curva cerrada guarda con el diámetro una relación inexacta cuyo valor se ha denominado universalmente con la letra griega: π (pi).

$$\pi = 3{,}1416$$

En la Técnica se acostumbra a tomar para los cálculos rápidos sólo 3,14, despreciando

$$C = \pi D$$
$$C = 2\,\pi R$$

$$S = \pi R^2$$
$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

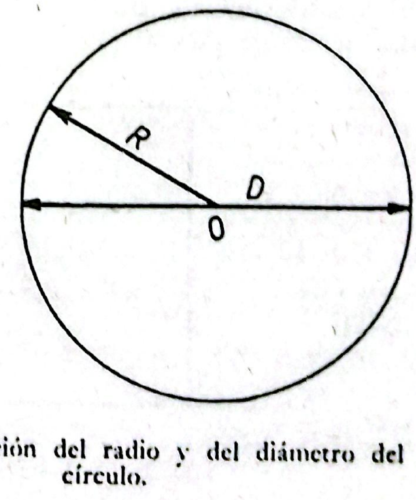


Fig. 10. – Indicación del radio y del diámetro del círculo.

decimales restantes, ya que tampoco la cifra anterior es exacta pues siguen muchos decimales más.

La longitud de la circunferencia es igual al producto de π por la medida de su diámetro.

El área encerrada por la circunferencia se llama *círculo* y su valor se calcula también en función del diámetro o el radio y del factor numérico π.

Partes de un círculo

Tomemos un círculo y tracemos otro con el mismo centro pero menor radio, según se ve en la Fig. 11. Desde el centro O tracemos dos rectas OA y OB, de cualquier inclinación. Unamos otros dos puntos cualesquiera como el C y el D con una recta. Se han formado varias superficies parciales interesantes.

La superficie comprendida entre los dos círculos concéntricos, tiene forma de anillo y se llama *corona circular*. Es evidente que su área igual a la diferencia entre la del círculo grande y la del chico, o lo que es lo mismo:

$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

Entendiéndose que primero se elevarán al cuadrado los dos radios R y r, luego se restarán esos resultados y finalmente se multiplicará esa resta por 3,1416.

La superficie comprendida entre las rectas OA, OB y la curva exterior se llama *sector circular*, y se calcula conociendo el ángulo (α) que forman esas dos rectas, dado en grados. La fórmula es:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

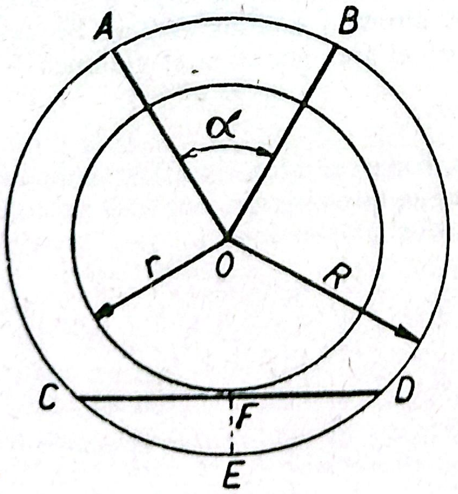


Fig. 11. — Subdivisión del círculo para mostrar un sector, un segmento y una corona.

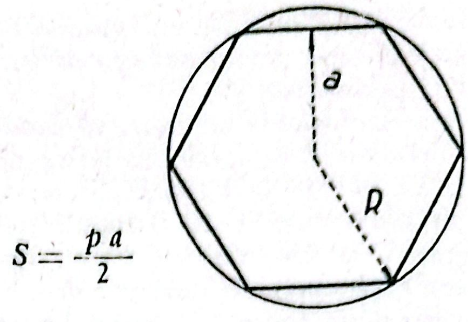


Fig. 12. — Exágono regular, indicando la apotema y el radio del círculo en el cual está inscripto.

De modo que se calcula conociendo el área del círculo completo, y multiplicándola por el ángulo α del sector y dividiendo por 360 que es el ángulo total de la circunferencia. Se trata de un problema de proporciones simples. Este tema de la medida de los ángulos lo estudiaremos más detalladamente en el capítulo próximo.

El área comprendida entre la recta CD y la curva exterior que pasa por el punto E, se llama *segmento de círculo*, y su área se calcula conociendo los siguientes valores:

Cuerda: long. $CD : c$
Flecha: recta $EF : f$

Siendo la cuerda y la flecha perpendiculares entre sí. El punto F debe estar en el centro de la recta CD. La superficie del segmento circular vale:

$$S = \frac{2}{3} c f$$

Que no es una fórmula exacta, pero que tiene suficiente aproximación en la práctica.

Polígono regular

Dentro de una circunferencia se pueden trazar figuras cerradas con cualquier número de lados, desde 3 como mínimo. Esas figuras se llaman polígonos y el de la Fig. 12 es uno de seis lados, es decir un *exágono*. El de 5 lados se llama pentágono, de 7 eptágono, de 8 octógono, etc.

En todos los polígonos se distingue una recta característica, que es la que parte del centro del círculo y llega a la mitad de uno de los lados, resultando perpendicular a ese lado. Es la *apotema* (a) de la Fig. 12. El área de cualquier polígono o sea la superficie encerrada por sus lados, se calcula conociendo la apotema y la suma de las longitudes de todos los lados, suma que se llama *perímetro*

(p) Si se conoce la longitud de un lado, no hay más que multiplicarla por el número de lados para tener el perímetro.

Observando la fórmula anterior, se deduce que se ha dividido al polígono en triángulos, uniendo el centro de la circunferencia con cada uno de los vértices. Cada triángulo tiene un área igual a la base (lado del polígono) por la altura (apotema) dividida por dos. Sumando las áreas de todos los triángulos sale la fórmula dada para el polígono.

51. — Areas y volúmenes de los cuerpos sólidos

Los cuerpos tienen formas muy diversas, de modo que para calcular el volumen que ocupan en el espacio se presentan operaciones algo complicadas. Sin embargo, si las formas guardan ciertas proporciones geométricas hay medios simples para hacer esos cálculos. La primera condición es que tengan caras planas y si algunas son paralelas entre sí, es más fácil aun calcular el volumen mediante fórmulas simples de la Geometría. Tendremos sólidos *regulares* e *irregulares*.

Entre los primeros se encuentran el paralelepípedo, el prisma, la pirámide, el cilindro, el cono, la esfera, etc. Veremos cada uno por separado, dando en cada caso las fórmulas para calcular el volumen y la superficie exterior o envolvente. El volumen puede servir para saber qué cantidad de líquido o sólido puede contener si es un recipiente, por ejemplo. La superficie exterior puede servir para saber qué cantidad de chapa hace falta para hacerlo, o para cuestiones similares.

Paralelepípedo

Es un bloque formado por caras paralelas dos a dos, pero cuyos planos son perpendiculares (ver Fig. 13). Las rectas de encuentro

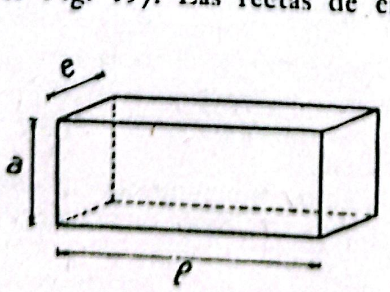


FIG. 13. — Paralelepípedo, con indicación de sus dimensiones principales: largo, ancho y espesor

de dos caras se llaman *aristas* y la cara en la que apoya el cuerpo, *base*. La distancia entre la cara paralela a la base y ésta se llama *altura*.

En la figura se han marcado las dimensiones de las aristas que son diferentes, aunque podría haber dos iguales entre ellas. El caso más general es que sean distintas. Suelen denominarse: largo (l), ancho (a) y espesor (e). Cada cara es un rectángulo, de modo que su área se calculará multiplicando su largo por su ancho. El área total exterior del cuerpo será igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos, pero como de cada tipo hay dos iguales, se puede escribir una fórmula simplificada. Llamando S al área exterior del cuerpo, se tiene:

$$S = 2\,(l\,a + a\,e + l\,e)$$

Donde cada término dentro del paréntesis es el área de uno de los rectángulos que hemos mencionado y son las primeras operaciones a realizar. Luego se sumarán los tres términos, y finalmente se multiplica por 2.

El volumen de un paralelepípedo se calcula en forma muy simple, conociendo las medidas de las tres aristas distintas, que suelen llamarse largo, ancho y espesor, de ahí que sus iniciales se tomen para los símbolos. El volumen está dado por:

$$V = l\,a\,e$$

Es decir, simplemente por el producto de las tres aristas indicadas en la Fig. 13 que se toman en m, por ejemplo, resultando el volumen en m³. O si no se pueden tomar en otra unidad, como ser el cm y el volumen resultará en cm³ y así sucesivamente.

Ejemplo: Se tiene un paralelepípedo cuya base es un rectángulo de largo 8 m y de ancho 3 m; la altura o espesor es 2 m. Se desea determinar el área lateral y el volumen.

Solución

Para hallar el área lateral se aplica la fórmula en la que el largo, ancho y espesor están expresados por su inicial.

$$S = 2\,(l\,a + a\,e + l\,e)$$
$$S = 2\,(8 \times 3 + 3 \times 2 + 8 \times 2)$$
$$S = 2\,(24 + 6 + 16)$$
$$S = 2 \times 46 = 92 \text{ m}^2$$

Para hallar el volumen se aplica la fórmula directa:

$$V = l\,a\,e$$
$$V = 8 \times 3 \times 2 = 48 \text{ m}^3$$

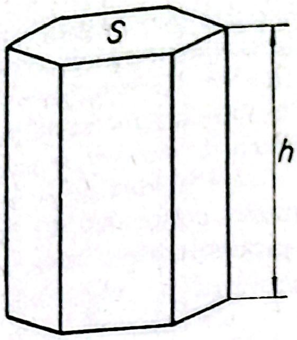


FIG. 14. – Prisma recto de base exagonal, indicando la altura.

Prisma

Si tomamos dos polígonos de cualquier número de lados, sean 3 o más y los colocamos paralelos a cierta distancia llamada *altura* (h), de modo que se puedan unir los lados de los polígonos con planos verticales, se obtiene un cuerpo sólido como el de la Fig. 14, que se llama prisma recto. Si los planos que forman las caras son inclinados en lugar de verticales, tenemos el prisma oblicuo.

La superficie lateral o sea la de las caras verticales de un prisma recto, se calcula multiplicando el perímetro de la base por la altura del prisma. Si cada lado del polígono de la base tiene una longitud l, y tiene n número de lados, el perímetro de la base vale:

$$p = n\, l$$

Y el área lateral del prisma será:

$$S_1 = n\, l\, h$$

De acuerdo con lo que se postuló. Si se quiere tener el área total incluyendo las dos bases, que son iguales, se agrega el área de éstas a la lateral. Si el área de cada base es s, tendremos:

$$S = n\, l \cdot h + 2\, s$$

Siendo S el área total exterior del prisma, y pudiéndose calcular el área de cada base con las fórmulas vistas anteriormente para superficies planas.

Si el prisma es oblicuo, para calcular el área lateral se toma el largo de la arista, o sea cualquiera de las rectas que une un vértice de la base inferior con el vértice homólogo de la base superior, en lugar de tomar la altura, que sigue siendo la distancia perpendicular entre las dos bases. Si esa arista la llamamos a, el área lateral del prisma será:

$$S_1 = n\, l\, a$$

Donde n y l tienen el mismo significado que antes. Las superficies de las bases se calculan en la forma conocida, de modo que el área total exterior del prisma se calculará sumando a la lateral la de las dos bases.

El *volumen* de un prisma, sea recto u oblicuo, se calcula en función de la superficie de la base, calculada con las fórmulas conocidas, multiplicándola luego por la altura h o distancia perpendicular entre las dos bases, es decir que el volumen será:

$$V = s\, h$$

Siendo s la superficie de la base, en m^2 y h la altura en m, por ejemplo, para que resulte el volumen en m^3. Si se toma otra unidad de longitud y de superficie para la altura y la base, el volumen resulta expresado en la correspondiente unidad cúbica. Pero debe aclararse que si se toma el centímetro, por ejemplo, para la altura, debe tomarse el cm^2 para la superficie de la base y así sucesivamente, es decir usar unidades homólogas.

Cubo

Es un cuerpo que puede considerarse un caso particular de paralelepípedo y de prisma al mismo tiempo. En efecto, si un paralelepípedo tiene todas sus caras iguales, tenemos el cuerpo ilustrado en la Fig. 15. Si un prisma tiene por base un cuadrado y por altura el mismo lado del cuadrado, también se convierte en un *cubo*.

El área total externa de un cubo será igual a 6 veces la de una de sus caras, ya que son todas iguales y como cada cara tiene por superficie el cuadrado de un lado o arista, tenemos:

$$S = 6\, l^2$$

Que dice que el área del cubo es igual a seis veces el cuadrado de su arista. Si se toma l en metros, el área resulta en m^2.

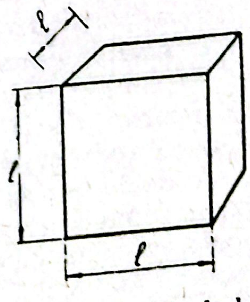


FIG. 15. – Cubo, con indicación de la longitud de su lado o arista.

El volumen del cubo se halla en la forma que se vio para el prisma, es decir, multiplicando el área de la base por la altura. Como el área de la base es la de un cuadrado, se obtiene elevando al cuadrado el lado y la altura es igual a ese mismo lado, resulta que el volumen se determina multiplicando el lado por sí mismo primero, y después multiplicando el resultado otra vez por ese lado, o lo que es lo mismo:

$$V = l^3$$

O sea que el volumen del cubo es igual a la arista elevada a la tercera potencia.

Pirámide

Es un cuerpo formado tomando un polígono cualquiera y un punto exterior, llamado vértice. Desde ese punto se trazan rectas que

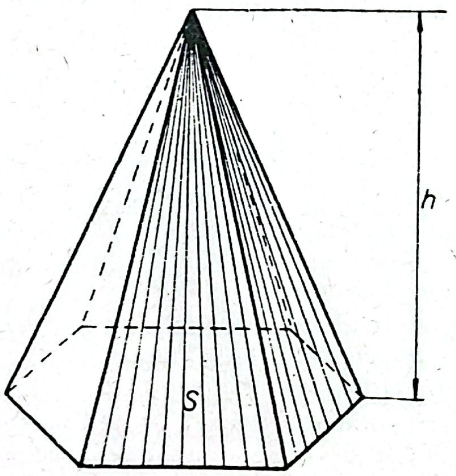


Fig. 16. — Pirámide recta de base exagonal, con indicación de la altura.

van a los vértices del polígono, y que forman las caras de la pirámide, tomando cada par de esas rectas y apoyando en ellas planos. La Fig. 16 ilustra una pirámide regular recta, porque el vértice está ubicado sobre la perpendicular del centro de la base. La distancia entre el vértice y la base se llama altura de la pirámide.

La superficie exterior de la pirámide se calcula sumando la de todas sus caras. La base es un polígono, de modo que su superficie se determinará con la fórmula que corresponda, ya sea un triángulo, un rectángulo, un cuadrado o un polígono de más lados. Las caras laterales son todas triángulos, cuya base es el lado del polígono inferior, y cuya altura es la recta que parte del vértice del cuerpo y cae perpendicularmente al lado del polígono base. Se aplica la fórmula del área del triángulo y se multiplica por el número de caras. Sea n el número de caras y s_1 el área de cada una de ellas; s será el área de la base, obtenida con las fórmulas conocidas. El área total externa de la pirámide es:

$$S = n\,s_1 + s$$

El volumen de la pirámide se halla conociendo la superficie de la base y la altura, o recta que baja perpendicularmente desde el vértice hasta la base. Si cae en el centro de ésta, la pirámide es recta; en caso contrario es oblicua. Si llamamos s a la superficie de la base y h a la altura, el volumen será:

$$V = \frac{s\,h}{3}$$

Es decir, un tercio del producto de la superficie de la base por la altura.

Ejemplo: Sea una pirámide de base cuadrada de 20 cm de lado, cuya altura mide 60 cm. Se desea saber el volumen.

Solución

Se aplica la fórmula:

$$V = \frac{s\,h}{3}$$

En la cual s es la superficie de la base y en consecuencia debe calcularse previamente. Como es un cuadrado la superficie se halla directamente:

$$s = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$$

Luego el volumen será:

$$V = \frac{400 \times 60}{3} = 8.000 \text{ cm}^3$$

Cilindro

Un *cilindro* es un prisma que tiene tantos lados que cada uno de ellos es una línea recta. Luego la base es un círculo, según se ve en la Fig. 17. El cilindro recto tiene sus dos bases, superior e inferior con sus centros sobre una recta perpendicular al plano de apoyo, o lo que es lo mismo, cualquier recta dibujada sobre la superficie lateral envolvente es perpendicular a las dos bases.

La base es un círculo, de radio r, de modo que la longitud de la circunferencia que lo circunda y el área del mismo son conocidas, en función del radio. La superficie lateral es

la de un rectángulo, puesto que si imaginamos al cilindro formado por un papel, y se lo abre a lo largo y se desarrolla sobre un plano, se obtiene un rectángulo. Luego el área de la base será:

$$s = \pi r^2$$

Y el área lateral será la del rectángulo cuya base es el desarrollo de la circunferencia y cuya altura es la del cilindro:

$$S_1 = 2 \pi r h$$

Con lo que el área total externa del cilindro se calcula sumando la lateral y la de las dos bases:

$$S = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$$

Debiendo tomarse el radio r y la altura h en la misma unidad de longitud, por ejemplo

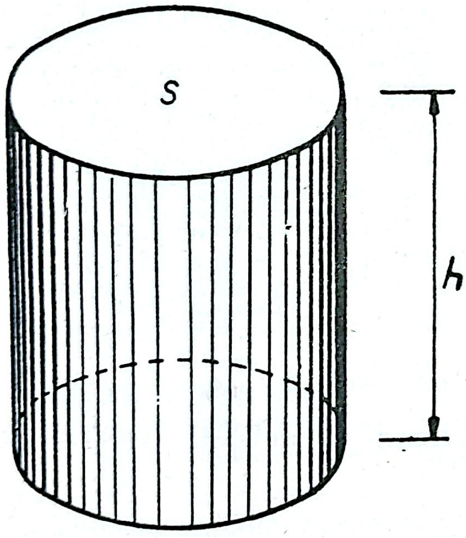


FIG. 17. – Cilindro recto, con indicación de la altura.

el m, para que el resultado se obtenga en m².

El volumen del cilindro se calcula como el del prisma, multiplicando el área de la base por la altura del cuerpo, es decir:

$$V = s h = \pi r^2 h$$

Y se obtendrá en m³ si se han tomado el radio y la altura en m.

En la práctica tiene una aplicación vastísima este caso, pues para calcular el peso de barras redondas de metal, por ejemplo, hay que calcular previamente el volumen, para después multiplicarlo por el peso de la unidad de volumen de ese metal. Como es común medir el diámetro (d) de los cilindros en lugar del radio, se puede dividirlo por 2 o aplicar la fórmula corregida, en la que aparecerá el diámetro de la base:

$$V = 0{,}785\, d^2 h$$

Que da también el volumen.

Ejemplo: Se tiene un cilindro cuyo radio de la base es 40 cm y cuya altura es 50 cm. Se desea determinar la superficie externa total y el volumen.

Solución

Previamente se calcula la superficie de cada base que es un círculo:

$$S = \pi r^2$$
$$S = 3{,}14 \times 40 \times 40 = 5024 \text{ cm}^2$$

Luego se determina el área lateral:

$$S = 2 \pi r h$$
$$S = 2 \times 3{,}14 \times 40 \times 50 = 12.560 \text{ cm}^2$$

Luego el área externa total vale:

$$12.560 + 5024 + 5024 = 22.608 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen se aplica directamente la fórmula:

$$V = s h$$
$$V = 5024 \times 50 = 251.200 \text{ cm}^3$$
$$V = 0{,}2512 \text{ m}^3$$

Cono

Tal como el cilindro era un prisma de infinito número de caras, diríamos que el *cono* (Fig. 18) es una pirámide cuya base es un círculo, con lo que tiene también infinito número de caras laterales. Aplicaremos las fórmulas de la pirámide para hallar el área ex-

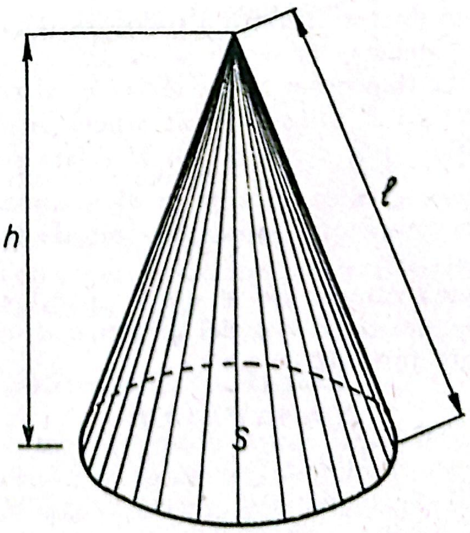


FIG. 18. – Cono recto, con indicación de la altura.

terior y el volumèn.

Por de pronto, el área de la base es la de un círculo, de radio r o de diámetro d, de modo que esa área será:

$$s = \pi r^2 = 0{,}785\, d^2$$

Y el área lateral es la de un triángulo cuya base es el desarrollo de la circunferencia que rodea al círculo base, y cuya altura es el largo de la *generatriz* l del cono, que está marcada en la figura. Se tiene:

$$S_l = \pi r l = \frac{\pi d l}{2}$$

Y el área total externa del cono será:

$$S = 0{,}785\, d^2 + \frac{\pi d l}{2}$$

Donde se han tomado el radio, el diámetro y la generatriz en la misma unidad de longitud, resultando el área de la base s, el área de la superficie lateral S_l y el área total externa del cono en la correspondiente unidad de superficie, m^2 por ejemplo.

El volumen del cono se halla en la misma forma que el de la pirámide, multiplicando el área de la base por la altura y dividiendo por 3. La altura es la recta que baja perpendicularmente desde el vértice hasta la base (h en la figura):

$$V = \frac{S h}{3} = \frac{0{,}785\, d^2 h}{3}$$

Donde debe tomarse el diámetro y la altura en m, por ejemplo, para obtener el volumen en m^3.

Esfera

Es un cuerpo distinto a todos los demás, ya que no tiene base, según se ve en la Fig. 19. La única dimensión a considerar es el radio o el diámetro d, tomado desde afuera, mediante un calibre, por ejemplo. En la esfera sólo se considera el área externa y el volumen, ya que no habrá que pensar en área de bases o laterales.

El área externa de la esfera se calcula en función del radio r o del diámetro d, con la siguiente fórmula:

$$S = 4 \pi r^2 = \pi d^2$$

Siendo indistinto cuál de las dos fórmulas se tome, pero siempre que se mida r o d en la unidad de longitud que dará por resultado la correspondiente unidad de superficie. Por ejemplo, d en metros para obtener S en m^2.

El volumen de la esfera se calcula con la siguiente fórmula:

$$V = \frac{4 \pi r^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6}$$

Siendo indistintas ambas fórmulas, la que usa el radio r o la del diámetro d.

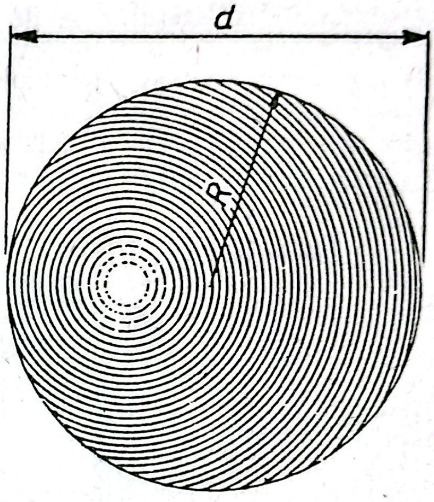


FIG. 19. — Esfera, con indicación del radio y del diámetro.

Ejemplo: Se tiene una esfera de 50 cm de diámetro y se desea hallar el área externa y el volumen.

Solución

Para la superficie externa se aplica la fórmula correspondiente:

$$S = \pi d^2$$
$$S = 3{,}14 \times 50 \times 50 = 7850 \text{ cm}^2$$

Y para el volumen también se tiene la fórmula directa:

$$V = \frac{\pi d^3}{6}$$

$$V = \frac{3{,}14 \times 50 \times 50 \times 50}{6} = 65.416 \text{ cm}^3$$

Día 6

Hemos aprendido a calcular la superficie de las figuras planas regulares y la superficie envolvente y el volumen de los cuerpos geométricos regulares, todo lo cual tiene frecuente aplicación en la técnica. Las fórmulas que debimos escribir para esa finalidad no nos resultaron complicadas por el hecho de que habíamos asimilado los principios de Álgebra vistos en los capítulos 3 y 4, tal como lo habíamos previsto; claro está que esas fórmulas son muy simples y no ofrecen complicaciones, pero de todos modos hemos hecho una buena experiencia. La Geometría elemental consiste precisamente en lo que hemos tratado, es decir la descripción de las figuras y cuerpos y los cálculos que se refieren a los mismos; pero en la técnica se presentan otras cuestiones geométricas que conviene conocer.

De entre todos los temas que estudia la Geometría, hemos elegido aquellos que tengan más frecuentes aplicaciones en los problemas y demostraciones de las técnicas que hemos mencionado muchas veces, es decir la Electricidad, la Mecánica, la Electrónica y la Televisión. Y así estudiaremos en la presente jornada algunas cuestiones referentes a ángulos, triángulos y gráficos, dejando de lado otros temas que si bien son interesantes como ejercitación matemática, no se necesitan casi para esa finalidad antes señalada. Y es que si nos ocupáramos de todo lo interesante que se puede estudiar en Matemáticas, no podríamos resumirlo en un solo libro y no podríamos prometer que en quince días se puede estudiar lo bastante para entender libros técnicos con formuleo y cálculos matemáticos. Con las precedentes aclaraciones, pasemos a ocuparnos de nuestro tema del día.

ESTUDIOS ADICIONALES DE GEOMETRIA

En el capítulo anterior hemos mencionado los ángulos, diendo que dos rectas que se cortan forman un ángulo y más adelante hicimos referencia a la medida de un ángulo al tratar el cálculo de la superficie de un sector circular (figura 11) mencionando el nombre de *grado* como unidad de medida. También vimos en la figura 2 que los ángulos podían ser rectos, agudos y obtusos, y con esas pocas referencias dimos por terminado todo lo referente al tema. Con respecto a los triángulos, los definimos y aprendimos a calcular su superficie sin ocuparnos más de ellos. En la Técnica ambas configuraciones geométricas tienen mucha importancia, por lo que debemos dedicarles nuestra atención.

Destinaremos este capítulo a estudiar algunas particularidades de los ángulos y los triángulos, como son la forma de medir los primeros, la igualdad de unos y otros y la semejanza de triángulos, además de algunos planteos que se han considerado necesarios dentro del objetivo fundamental de este libro. Más adelante haremos un estudio particular del triángulo que se conoce con el nombre de *Trigonometría*, ciencia cuyo nombre deriva del griego y quiere decir *medida de la figura de tres lados;* a ella dedicaremos todo el capítulo 9. Pero conviene aclarar que no nos ocuparemos de todos los casos que pueden estudiarse sino de los que tengan aplicación en las ciencias que usan las Matemáticas como auxiliar y entre ellas las que hemos mencionado ya varias veces.

52. — Estudio de los ángulos

No repetiremos la figura 2 que nos mostraba cómo se forma un ángulo mediante dos rectas que se cortan, pero conviene comenzar a indicar las cosas en la forma como se estila en la técnica general. La figura 20 nos mues-

tra un ángulo con las indicaciones necesarias; las rectas que lo forman también se llaman lados y se designan con letras minúsculas, en este caso *a* y *b*. El vértice o punto de cruce

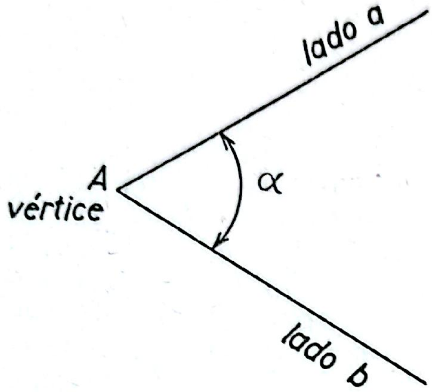


Fig. 20. — Indicaciones en un ángulo.

de ambas rectas lleva una letra mayúscula, que hemos adoptado esta vez como *A*. La medida de la abertura formada es la medida del ángulo, y generalmente se emplea para designarla una letra griega, que en la figura es una alfa; a veces se marca el arco con un compás.

Antes de entrar a estudiar algunas particularidades referentes a los ángulos, debemos ocuparnos de la medida de los mismos, es decir de la manera cómo puede determinarse la abertura mediante una cifra que nos permita conocerla sin necesidad de tener el ángulo dibujado. Las letras griegas más usadas para ángulos son las primeras del alfabeto griego:

alfa: α
beta: β
gama: γ
delta: δ

53. — Medida de los ángulos

De todos los sistemas propuestos sólo nos interesan dos: el *sexagesimal* y el *circular*, ya que otros conocidos han caído en desuso o no nos interesan para nuestro objetivo.

El sistema *sexagesimal* consiste en dividir la circunferencia en 360 partes iguales o lo que es lo mismo, una cuarta parte de la circunferencia en 90 partes iguales, tal como lo demuestra la figura 21. Cada parte constituye la unidad de medida de los ángulos y se llama *grado;* en la figura no hemos dibujado el ángulo de un grado porque es tan pequeña la abertura que se confunden los dos lados en uno solo. Las fracciones de grado no son usualmente sus décimos, centésimos, etc., sino que se toman sesenta partes de un grado y esa fracción se llama *minuto;* a su vez, el minuto admite la subdivisión en sesenta partes iguales que se denominan *segundos.*

El lector se preguntará el motivo de usar divisiones tan pequeñas, si hemos dicho que un ángulo de un grado era de abertura muy chica, pero es para expresar las fracciones de grado que superan las cantidades enteras. La forma de escribir las unidades de ángulos con grados, minutos y segundos es mediante símbolos; así, un ángulo de 27 grados con 15 minutos y 10 segundos se escribe así:

$$27° \, 15' 10''$$

Otro problema es el de hacer operaciones con ángulos, cuando ellos están expresados en grados y fracciones; si estas últimas superan las 60 unidades hay que descontar esa cantidad y sumar una unidad a los enteros que preceden. Por ejemplo, si tenemos después de una operación, $32° \, 72'$, como el máximo de

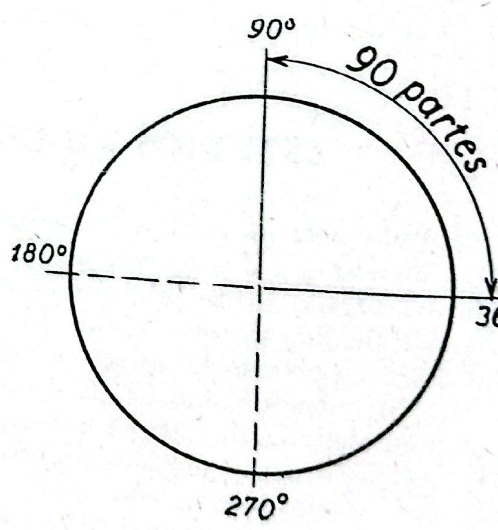


Fig. 21. — Medida de los ángulos en grados.

minutos que pueden tenerse son 60, descontamos 60′ a los 72′ y escribimos un grado más, así: $33° \, 12'$, poniendo el resto de minutos. Esto puede ocurrir al realizar operaciones aritméticas con valores de ángulos.

Ejemplo: Sea el caso de sumar dos ángulos cuyos valores son: $25° \, 45' \, 35''$ y $12° \, 20' \, 28''$.

Solución

Primero se colocan los dos valores en posición de suma y se realiza ésta:

$$\begin{array}{rrrr} & 25^\circ & 45' & 35'' \\ + & 12^\circ & 20' & 28'' \\ \hline & 37^\circ & 65' & 63'' \end{array}$$

y luego, restamos 60 segundos de los 63 que tenemos, dejando el resto de 3″ y sumando un minuto, con lo que tendremos 66′; de ellos restamos 60′ y nos quedan 6′, pero debemos agregar un grado a los 37 que teníamos; finalmente escribimos la suma anterior así:

$$38^\circ\ 6'\ 3''$$

Ejemplo: Sea dividir un ángulo de 35° en cuatro partes iguales. Para tal fin se divide el número 35 por 4, pero como no hay cociente entero exacto, nos quedará un resto de 3°, los que convertimos en minutos, que son 180; ahora dividimos por 4 y tenemos cociente exacto 45′; luego, el resultado será:

$$\frac{35^\circ}{4} = 8^\circ\ 45'$$

Y si hubiera un resto de minutos, lo multiplicaríamos por 60 y lo dividiríamos por 4, teniéndose una cantidad de segundos que va al resultado.

Ejemplo: Sea el caso de multiplicar el ángulo de 15° 12′ 40″ por 5. Primero hacemos la multiplicación aritmética común:

$$\begin{array}{rrrr} & 15^\circ & 12' & 40'' \\ & & \times & 5 \\ \hline & 75^\circ & 60' & 200'' \end{array}$$

y ahora debemos quitar los minutos que hay en los 200″, que son 3′ y nos queda un resto de 20″; luego sumamos los 3′ a los 60′ que tenemos y vemos que hay un grado entero y un saldo de 3′; sumamos ese grado a los 75 y ponemos el resultado final:

$$76^\circ\ 3'\ 20''$$

El sistema sexagesimal de medidas de ángulos tiene el inconveniente de las fracciones de grado, tal como lo hemos visto en las operaciones que se hicieron en los ejemplos propuestos. En la técnica se emplea a veces el otro sistema, que se llama *circular*, y cuyo principio se ilustra en la figura 22. Consiste en tomar el radio y extenderlo sobre la circunferencia, haciendo que el arco abarcado sea de igual longitud que el radio. Como sabemos que la longitud de la circunferencia es igual a 6,28 veces la del radio, es evidente que si medimos los ángulos con esta unidad nueva, que se llama *radián*, habrá 6,28 radianes en la circunferencia completa, o sea que:

$$360^\circ = 6{,}28 \text{ radianes}$$

y, lógicamente, se establece la equivalencia entre las dos unidades para medir grados, por simple cociente:

$$1 \text{ radián} = 57{,}3^\circ$$

En la práctica, cuando se tiene expresado un ángulo y no se aclara la unidad, puede reconocerse la misma por el hecho de que en

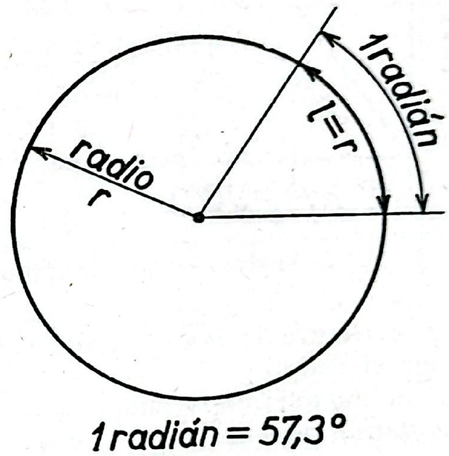


FIG. 22. — Medida de los ángulos en radianes.

un caso aparece el símbolo de *grados* (°) y en el otro caso no aparece, existiendo solamente un número. Por ejemplo, un ángulo de 72° está expresado en *grados*, pero un ángulo de 2,4 está expresado en *radianes*.

54. — Definiciones sobre ángulos

Cuando empezamos a hablar de ángulos, a propósito de la figura 2, dijimos que los mismos podían ser rectos, agudos y obtusos; más adelante advertimos que era común indicar los ángulos con letras griegas y finalmente hablamos de las unidades para medir ángulos. Pero en la técnica hacen falta otras cosas acerca de los ángulos, de las que nos ocuparemos ahora.

Veamos en primer término unas definiciones que son muy importantes para futuras aplicaciones. La figura 23 nos presenta la primera definición, que dice que son *ángulos complementarios* aquellos cuya suma vale un

ángulo recto o sea 90°. Si conocemos el valor de un ángulo α, el complementario se puede calcular de inmediato, pues vale:

$$\beta = 90° - \alpha$$

Y de allí en adelante colocando el valor en grados, minutos y segundos se tiene el resultado. Si expresamos esos ángulos en radianes, uno recto vale 1,57 radianes, que es la cuarta parte de 6,28. Luego, el complementario vale

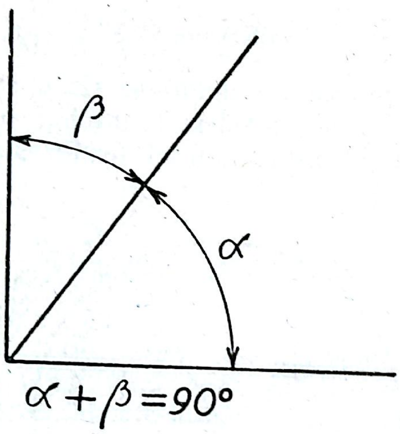


FIG. 23. — Angulos complementarios

la diferencia entre 1,57 y el valor en radianes que tenga el dado.

Otra definición importante; son *ángulos suplementarios* aquellos cuya suma vale dos

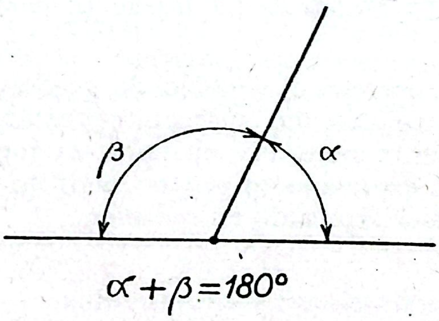


FIG. 24. — Angulos suplementarios.

ángulos rectos, o sea 180°, tal como lo muestra en forma gráfica la figura 24. Luego, si se conoce un ángulo α, el suplemento vale:

$$\beta = 180° - \alpha$$

y si estuvieran expresados en radianes, como 180° equivalen a 3,14 radianes, se descontaría al valor 3,14 el del ángulo dado para tener el complemento.

Una tercera definición importante: se llama *bisectriz* de un ángulo a la recta que lo divide en dos partes iguales, tal como lo muestra la figura 25. Las dos rectas *a* y *b* se cortan en el punto *O* y forman el ángulo α. La recta *c* lo

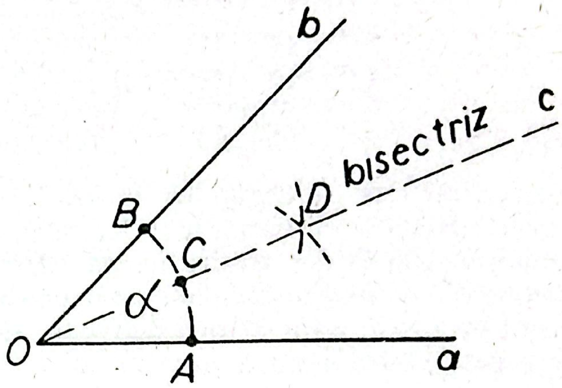


FIG. 25. — Bisectriz de un ángulo.

corta en dos ángulos iguales y entonces es la bisectriz. Para trazarla, se marca el arco *A B* con el compás, que fija los dos puntos *A* y *B* que equidistan de *O*. Luego, con centro en *A* y en *B* se trazan dos pequeños arcos que se cortan en el punto *D*; uniendo *D* con *O* se tiene la bisectriz *c*. El punto *C* en el arco *A B* está en el punto central del mismo.

55. — Igualdad de ángulos

En la técnica se presentan muchas veces los casos de ángulos iguales y si se fijan las condiciones para que esa igualdad sea cierta, no hace falta demostrarlo cada vez que ocurra. Hay dos casos importantes de igualdad de ángulos.

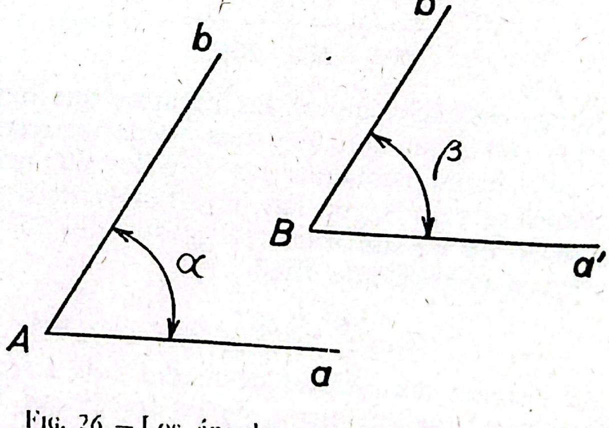


FIG. 26. — Los ángulos que forman grupos de paralelas son iguales.

La figura 26 muestra el primer caso, que dice que los ángulos formados por dos pares de rectas paralelas entre sí son iguales. Es decir que uno de los ángulos, el α, formado

por las rectas *a* y *b* con vértice *A* es igual al ángulo β, formado por las rectas *a'* y *b'*, con vértice *B*, siempre que la recta *a* sea paralela a *a'* y que la recta *b* sea paralela a la *b'*. La razón es evidente: si el ángulo se mide por la abertura entre las rectas, y la *b* se aparta de la *a* la misma cantidad que la *b'* se apartó de la *a'*, ya que son paralelas de a pares, las aberturas y por consiguiente los ángulos son iguales.

El otro caso está indicado en la figura 27. Dos rectas *a* y *b* se cortan en el punto *A*. Se forman cuatro ángulos y la igualdad se cumple entre los llamados *opuestos por el vértice.* Son iguales los ángulos α_1 y α_2 y a su vez son iguales los ángulos β_1 y β_2. Ello es evidente, pues la abertura que forman las rectas *a* y *b* hacia un lado del vértice es igual a la que forman hacia el otro lado, precisamente por ser líneas rectas; luego, las dos igualdades especificadas son ciertas.

Hay un caso interesante de aplicación de igualdades de ángulos que es de frecuente aplicación en la técnica; se trata de dos rectas paralelas cortadas por una oblicua, también llamada *secante*, caso ilustrado en la figura 28.

Dos rectas paralelas *a* y *b* son cortadas por la secante *c*. Se forman varios ángulos, precisamente ocho, pero hay dos grupos de cuatro y cuatro que son iguales entre sí. Veamos cuáles son y el porqué. Los ángulos opuestos

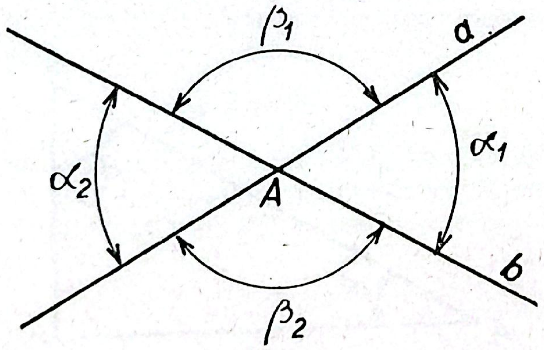


FIG. 27. — Angulos opuestos por el vértice.

por el vértice son iguales, y entonces ya tenemos las siguientes igualdades:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\beta_1 = \beta_2$$
$$\alpha_3 = \alpha_4$$
$$\beta_3 = \beta_4$$

Ahora tratemos los ángulos formados por pares de paralelas, que también sabemos que son iguales. Los ángulos que forman las rectas *c* y *a* son iguales a los que forman *c* y *b*, por ser *a* y *b* paralelas y *c* ser una recta única, que sería el caso de dos paralelas encimadas. Luego, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\alpha_1 = \alpha_3$$
$$\alpha_2 = \alpha_4$$
$$\beta_1 = \beta_3$$
$$\beta_2 = \beta_4$$

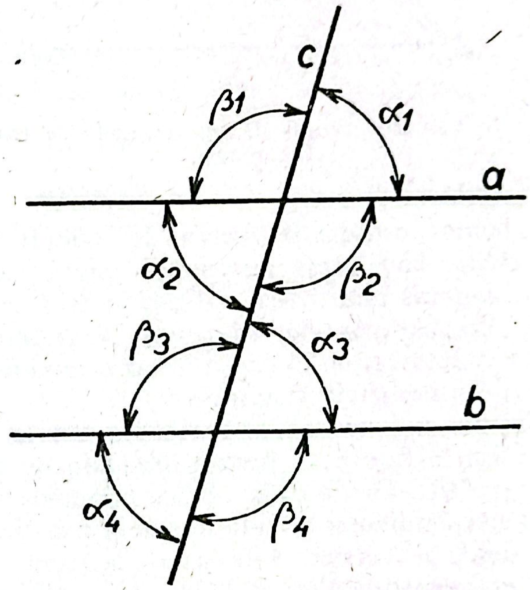


FIG. 28. — Angulos que forman dos paralelas cortadas por una oblicua o secante.

Y ahora veamos las igualdades que se cumplen entre los ángulos llamados alternos. El primer grupo lo forman los *alternos internos:*

$$\alpha_2 = \alpha_3$$
$$\beta_2 = \beta_3$$

que son iguales porque α_1 es igual a α_2 por ser opuestos por el vértice y α_1 es igual a α_3 por ser paralelos sus lados. Lo mismo para el par β_2 y β_3. El segundo grupo lo forman los alternos externos:

$$\alpha_1 = \alpha_4$$
$$\beta_1 = \beta_4$$

que son iguales por ser α_1 igual a α_3 por opuestos por el vértice y α_3 igual a α_4 por tener lados paralelos. Lo mismo para el par β_1 y β_4.

56. — Estudios sobre triángulos

Ya hemos visto que el triángulo es la figura geométrica cerrada que tiene el mínimo de

lados: tres, y por consiguiente tiene también tres ángulos internos, que son los que forman cada par de lados contiguos. Además de lo

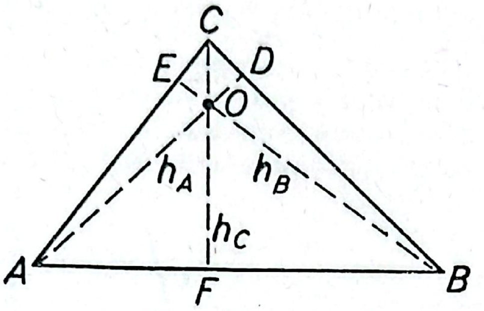


FIG. 29. — Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto.

que hemos estudiado acerca de calcular la superficie, hay otras cuestiones referentes a los triángulos que tienen aplicación en la técnica. De algunas de ellas nos ocuparemos ahora y de otras en el captíulo correspondiente a Trigonometría (capítulo 9).

Veamos algunas particularidades del triángulo. En la figura 29 hemos dibujado un triángulo ABC. Desde cada vértice trazamos una recta perpendicular al lado opuesto; por ejemplo, desde el vértice A trazamos la recta AD que es perpendicular al lado BC o sea que forma con él un ángulo de 90°. Tal recta se llama *altura* de A, se la simboliza con la letra h_A y es la altura del triángulo si lo consideramos apoyado en el lado BC como *base*. Sigamos, y tracemos la altura h_B, o sea la perpendicular al lado CA trazada desde el vértice B; finalmente, tracemos la altura h_C que es la perpendicular al lado AB trazada desde C. La

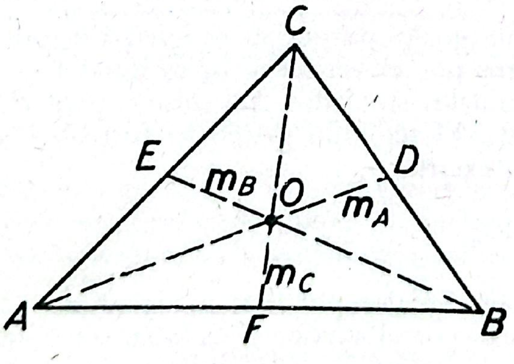


FIG. 30. — Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto.

particularidad del triángulo es que las tres alturas se cortan en un punto común O.

Definamos ahora otra recta característica del triángulo, la *mediana* (ver figura 30). Es la recta que parte de un vértice y llega al punto medio del lado opuesto. Lógicamente en el triángulo hay tres medianas y son las rectas AD, llamada m_A, con la particularidad de que el punto D está en el centro de BC, la m_B que partiendo del vértice B llega al punto medio E del lado AC y la m_C que parte de C y llega al punto medio del lado AB, o sea al punto F. La propiedad que presentan las tres medianas en un triángulo es que se cortan en

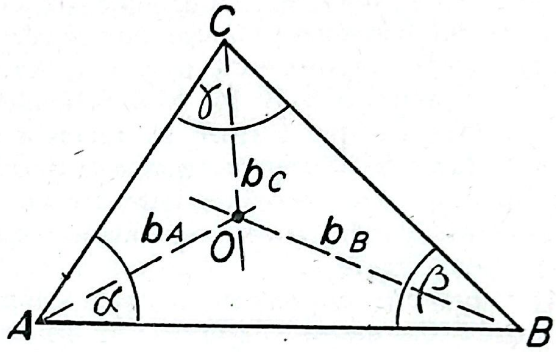


FIG. 31. — Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.

un punto común O, que nada tiene que ver con el otro punto O de la figura 29.

Y como tercera particularidad importante del triángulo, tracemos las bisectrices de sus tres ángulos, como se ve en la figura 31. Esas

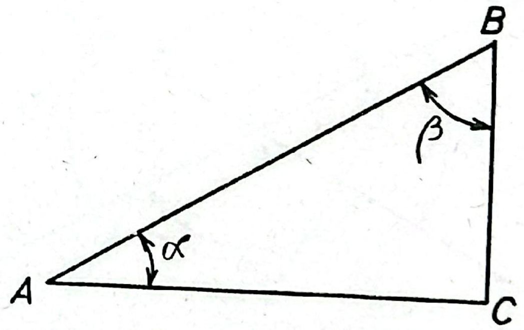


FIG. 32. — Triángulo rectángulo, con indicación de sus ángulos y vértices.

tres rectas dividen respectivamente a los tres ángulos por la mitad, es decir que la b_A divide al ángulo α por la mitad, etc. Las tres bisectrices también se cortan en un punto común O, que no tiene relación con los otros antes vistos, y que si coincide con alguno de ellos es por casualidad.

Hay un caso particular de triángulo que merece destacarse por la importancia que tiene en la técnica: es el *rectángulo*, ilustrado en

la figura 32 y que presenta la particularidad de que tiene un ángulo recto, el que corresponde al vértice C en el caso de la figura, o sea que los lados AC y CB son perpendiculares. Debido a ese detalle el ángulo recto suele

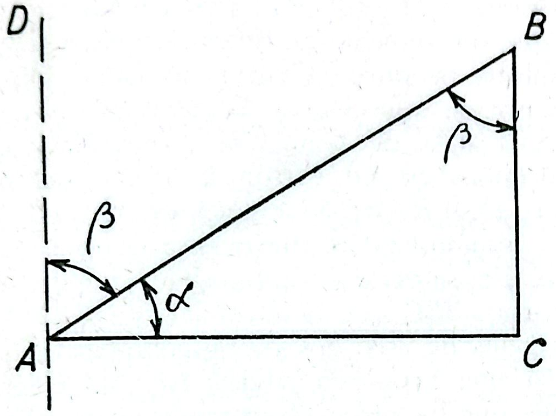


FIG. 33. — La suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, vale 90°.

no indicarse en la figura con letra alguna, pues siempre vale 90°.

Pasemos ahora a una propiedad muy importante de los triángulos, que dice que la suma de los tres ángulos vale 180°. Para demostrarlo, comencemos por el triángulo rectángulo, en el cual es más fácil probar esa propiedad. La figura 33 nos muestra un triángulo rectángulo en el cual se han marcado los dos ángulos agudos α y β, ya que el otro tiene siempre 90°; lógicamente basta demostrar que:

$$\alpha + \beta = 90°$$

y queda probado que la suma de los tres ángulos es 180°. Tracemos por el vértice A una recta paralela al lado BC y estamos frente al

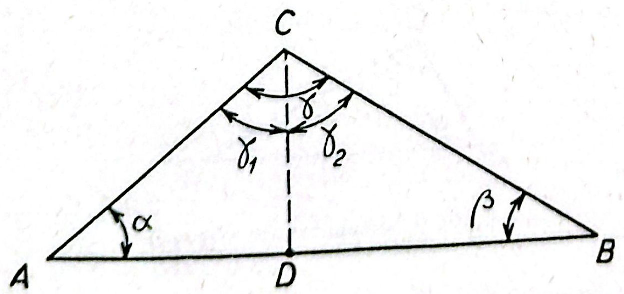


FIG. 34. — La suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°.

caso de la figura 28; pues AD y BC son dos paralelas cortadas por la secante AB; entonces los ángulos marcados con la letra β son iguales por ser alternos internos. Observemos que en el vértice A tenemos dos ángulos complementarios, caso de la figura 23, cuya suma vale 90° y esto es lo que queríamos demostrar.

Pasemos ahora a un triángulo cualquiera, no rectángulo, como el que vemos en la figura 34. Para demostrar que la suma de sus tres ángulos vale 180° lo dividimos en dos triángulos rectángulos bajando la perpendicular CD. En el triángulo ACD se cumple que:

$$\alpha + \gamma_1 = 90°$$

y en el triángulo CBD también se cumple que la suma de sus dos ángulos agudos vale 90°:

$$\beta + \gamma_2 = 90°$$

luego, sumando las dos ecuaciones anteriores miembro a miembro tenemos:

$$\alpha + \gamma_1 + \beta + \gamma_2 = 90° + 90°$$

pero las dos partes del ángulo γ cumplen la condición:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$$

con lo que finalmente nos queda:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

que es lo que queríamos demostrar, o sea que la suma de los tres ángulos vale 180° o sea dos ángulos rectos.

57. — Igualdad de triángulos

Muchas veces se presenta en la técnica la necesidad de demostrar que dos triángulos son iguales y por tal motivo nos ocuparemos de ese tema. Un triángulo tiene seis elementos, tres lados y tres ángulos y si consideramos dos triángulos, no es necesario probar que tienen sus seis elementos iguales para que sean idénticos, pues basta probar la igualdad de tres elementos. Dibujemos dos triángulos que aparecen como iguales a la vista, según lo muestra la figura 35 y veamos cómo se demuestra la igualdad matemática de ambos.

1º) Dos triángulos son iguales cuando tienen igual uno de sus lados y los dos ángulos adyacentes. Esta condición se escribe así:

$$AB = A'B'$$
$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$

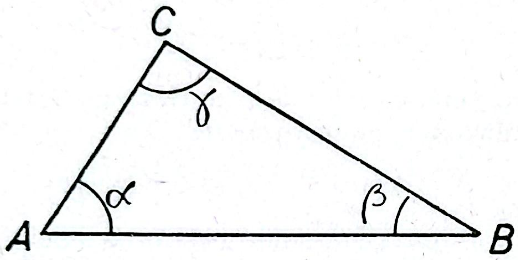
Y la demostración es evidente, pues si superponemos $A'B'$ sobre AB coincidirán los ex-

tremos y en ellos trazamos los ángulos iguales que indica la condición escrita arriba, el vértice C' caerá forzosamente sobre el C.

2º) Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales uno de sus ángulos y los lados contiguos al mismo. Esta condición se escribe así:

$$\alpha = \alpha'$$
$$AB = A'B'$$
$$AC = A'C'$$

Y la demostración es evidente pues si superponemos el vértice A' sobre el A, los ángulos



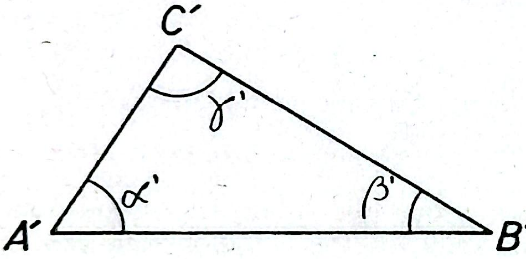


Fig. 35. — Igualdad de triángulos.

α y α' coinciden y las longitudes de los lados AB y $A'B'$ también, la recta o lado $C'B'$ caerá forzosamente sobre la CB.

3º) Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales sus tres lados homólogos. Esta condición se escribe así:

$$AB = A'B'$$
$$BC = B'C'$$
$$CA = C'A'$$

Y la demostración surge del hecho de que si superponemos los lados base y haciendo centro en los vértices A y B superpuestos a los A' y B' con medidas del compás iguales a los otros dos lados, los arcos trazados desde ambos vértices se cortarán en el punto C coincidente con el C'.

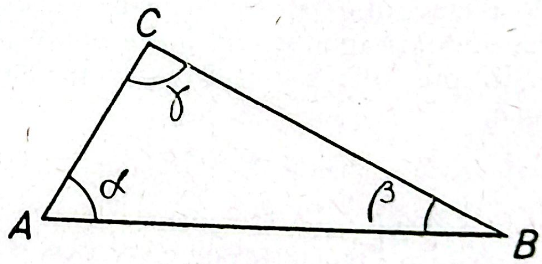
58. — Semejanza de triángulos

La semejanza en las figuras geométricas quiere decir que ellas tienen la misma forma o proporción, sin ser iguales. Por ejemplo dos cuadrados son siempre semejantes si no son iguales; dos círculos también. Pero si pensamos en un triángulo semejante a otro, ello quiere decir que su aspecto es el mismo como si uno fuera una copia fotográfica ampliada o reducida del otro.

Veamos la figura 36; aparecen dos triángulos que son semejantes, tienen la misma forma, la misma proporción entre sus lados, uno es más grande que el otro. Para visualizar mejor la semejanza de triángulos imaginemos que recortamos en un cartón la figura del más chico, el $A'B'C'$ y lo colocamos frente a un foco luminoso y paralelamente a una pared; sobre ésta se verá la sombra del triángulo, con la forma ABC que muestra la figura 37. Los tres lados de esos dos triángulos guardan entre sí una proporcionalidad fija, unos serán dobles que los otros, serán triples o guardarán una razón cualquiera, como 1,3 ó 3,7 u otra. La relación o razón entre los lados de uno y otro triángulo la podemos llamar m y escribir las siguientes relaciones:

$$m = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

es decir que en los triángulos semejantes hay una relación fija entre los tres lados homólogos. Asimismo, es evidente que los tres ángu-



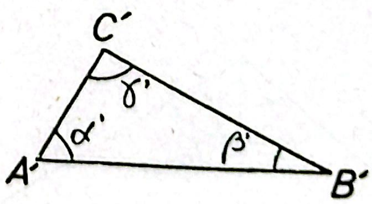


Fig. 36. — Semejanza de triángulos.

los de uno de los triángulos son respectivamente iguales a los del otro, o sea que refiriéndonos a la figura 36 podemos escribir:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$
$$\gamma = \gamma'$$

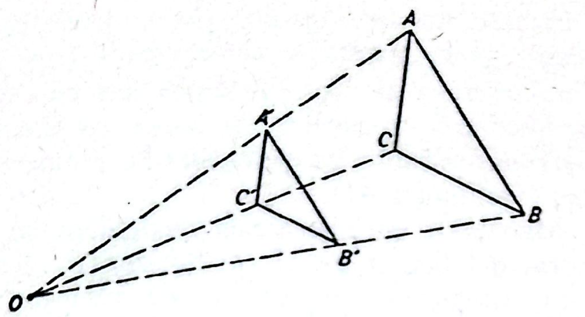


Fig. 37. — Forma objetiva de ver la semejanza de triángulos.

Las dos condiciones fijadas anteriormente son dos de las condiciones de semejanza, es decir que si se sabe que dos triángulos tienen sus lados respectivamente proporcionales, son semejantes; y la otra es que si dos triángulos tienen sus ángulos iguales entre sí, son semejantes. Hay una condición adicional derivada de esta segunda, y es que si dos triángulos tienen sus lados homólogos perpendiculares entre sí, son semejantes. Veamos este caso en la figura 38.

El lado $A'B'$ del segundo triángulo es perpendicular al AB del primero, el $B'C'$ es perpendicular al BC y el $A'C'$ es perpendicular al AC. Bastaría girar el segundo triángulo 90° para que los lados homólogos sean paralelos en vez de perpendiculares y caeríamos en el caso de la figura 37, de modo que la semejanza planteada es cierta.

Y finalmente, hay otra condición de semejanza que dice que si dos triángulos tienen iguales uno de sus ángulos, comprendido entre dos lados que guardan proporcionalidad son semejantes. El caso se ilustra en la figura 39 y la condición anterior se escribe así:

$$\beta = \beta'$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

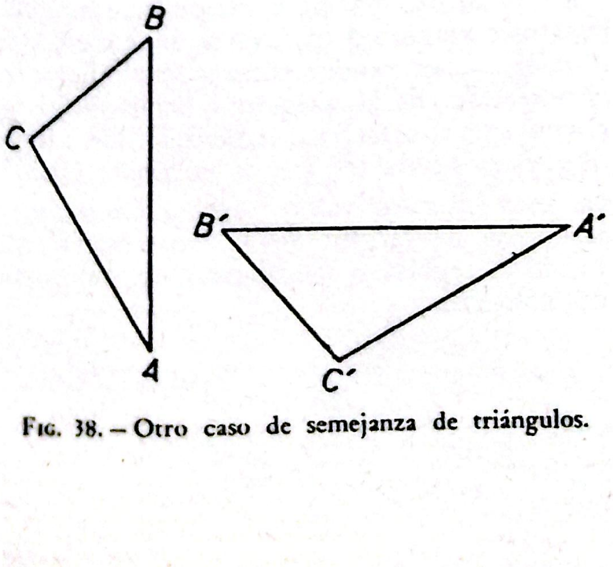


Fig. 38. — Otro caso de semejanza de triángulos.

Para demostrar esa semejanza no hay más que trasladar el triángulo superior y colocarlo dentro del inferior, haciendo coincidir el vértice B' con el B. Como los ángulos en ese vértice son iguales, tendremos la figura $BC''A''$ que se superpone con la BCA y en la cual el lado $C''A''$ es paralelo al CA; esto último es porque siempre dos rectas paralelas cortan a otras dos concurrentes en partes proporcionales. Si se desea tener este hecho comprobado objetivamente volvamos a la figura 37, en la cual los dos triángulos tienen sus lados paralelos entre sí; corramos al triángulo chico hasta superponerlo al grande de modo que los vértices B y B' coincidan: el paralelismo entre

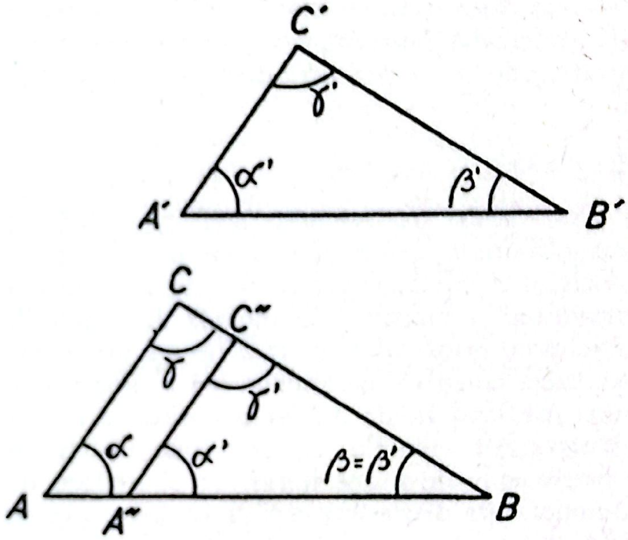


Fig. 39. — Demostración de la semejanza de triángulos.

los lados AC y $A'C'$ no se puede haber alterado y tenemos el caso de la figura 39 en la que se cumplirá el paralelismo entre AC y $A''C''$ antes afirmado. Luego la condición de semejanza es cierta.

59. — Representaciones gráficas

La Geometría da, mediante una de sus partes, la forma de visualizar rápidamente cualquier fenómeno o función de naturaleza variable. Así, se puede demostrar en un diagrama la marcha de un negocio, el tránsito diario de una calle, etc. Para ello nos valemos de los *diagramas cartesianos*, o sistemas de coordenadas.

Un sistema cartesiano está formado por dos ejes perpendiculares, según se ve en la Fig. 40, que se encuentran en el punto O. El eje horizontal se llama de *abscisas* y el vertical de *ordenadas*. Ambas magnitudes, abscisas y or-

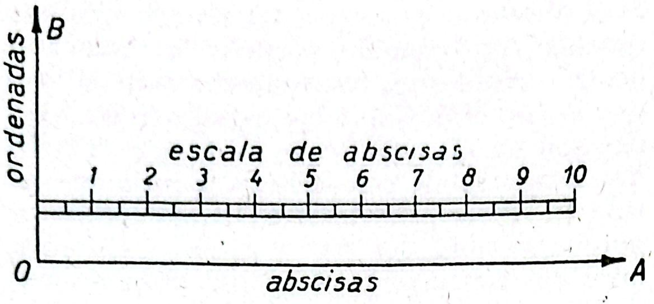


Fig. 40. — Ejes coordenados para representaciones gráficas.

denadas están ligadas entre sí por una función o una dependencia cualquiera, por lo que se las llama *coordenadas*. Así, si en el eje de abscisas tomamos las horas del día y en el de ordenadas las temperaturas tendremos un gráfico de la temperatura diaria (ver Fig. 41).

Escalas

Para poder representar una magnitud en un gráfico, es menester adoptar una escala, es decir, una equivalencia entre unidades de esa magnitud y unidades de medida de longitud. Dicho en otras palabras, se adoptará una equivalencia entre un centímetro en el gráfico, y una cantidad fijada de esa magnitud a representar. Por ejemplo, diremos que un centímetro equivale a dos horas, en el gráfico de temperatura diaria. En la Fig. 40 se ha dibujado una escala gráfica junto al eje de abscisas, suponiendo que la magnitud que será tomada en ese eje tenga diez unidades. Del mismo tipo sería la escala si se tratara de otro número de unidades. Para el eje de ordenadas procedemos en la misma forma, tomando una escala.

Una vez hecho el gráfico, para interpretar una lectura se mide la cantidad de centímetros y se determina la magnitud haciendo la operación inversa que se hizo al dibujar. Así, para trazar el gráfico de temperaturas, por ejemplo, se dividía la cantidad de horas por dos, para tener centímetros, puesto que dijimos que 1 cm equivalía a dos horas. Para leer en el gráfico una cantidad de horas, se mide la longitud en centímetros y se multiplica por 2 para tener las horas.

Representación de valores variables

En la Técnica es más común utilizar el diagrama cartesiano para representar magnitudes variables. Así supongamos que se desee representar gráficamente la variación de temperatura durante el día. Tomamos dos ejes perpendiculares y mediremos sobre las abscisas las horas y sobre las ordenadas las temperaturas (ver figura 41).

Marcamos en una escala cualquiera las 24 horas del día, sobre el eje horizontal (abscisas); marcamos los grados de temperatura desde cero hasta 20 sobre el eje vertical (ordenadas), suponiendo que no se ha tenido mayor temperatura en ningún momento. Se verá que se han marcado cada dos grados una raya, pues no es obligatorio el marcar una división cada unidad, pudiendo tomarse una, dos, diez o cualquier cantidad de unidades por división. A las 0 horas 10° C, luego marcamos en la vertical de 0 horas 10 unidades hacia arriba. Para los demás puntos conviene hacer un cuadriculado, o utilizar un papel que ya lo tenga hecho. A la 1 hora había 9° C, luego debemos tomar ese punto en la mitad

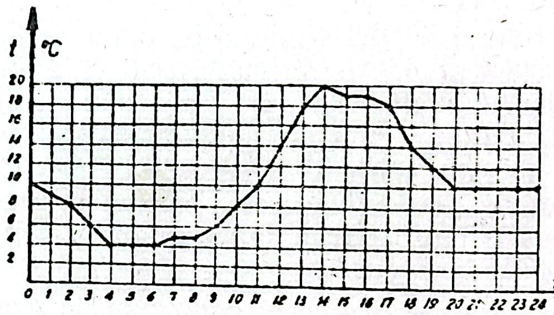


Fig. 41. — Representación gráfica de una magnitud variable cualquiera, como ser la temperatura diaria.

de la división comprendida entre 8° C y 10° C. Así se marcan las demás temperaturas del día, uniendo finalmente todos los puntos con una curva o con trazos rectos, según se ve en la figura. El diagrama obtenido puede llamarse: *gráfico de las temperaturas diarias*.

En la forma descripta puede representarse cualquier magnitud que varía en función de otra, como ser rendimientos o cualquier otra característica de las máquinas, haciendo variar el consumo u otra cosa; la densidad de campo magnético producido por la corriente eléctrica, para distintos valores de esa corriente, y una serie de magnitudes características, que varían al regular o modificar otras relacionadas con ellas.

Día 7

A medida que avanzamos en el estudio de las Matemáticas comprobamos que estamos constantemente haciendo práctica de formuleo, aplicando reemplazo de letras por números para encontrar resultados y buscando qué es lo que necesitamos conocer para resolver los problemas que se plantean; y bien, eso es lo que hemos fijado como objetivo de este libro. Hemos dicho al comenzar la tarea que no nos interesaba la materia como una disciplina mental o como un método para desarrollar la intuición, sino como una herramienta auxiliar para las materias técnicas. Las operaciones fundamentales de la Geometría que hemos practicado en el capítulo 5 son un ejemplo de lo dicho, ya que en esos casos interesa encontrar un resultado utilizando una fórmula y no deducir ésta.

Volveremos ahora al Algebra, de la cual tomaremos las ecuaciones de primer grado, así llamadas las que tienen la incógnita sin exponentes, pero cuando hay más de una incógnita. Se forman así los sistemas de ecuaciones que deben ser resueltos, es decir, deben encontrarse los valores numéricos de todas las incógnitas. Estos casos son comunes y frecuentes en la técnica de modo que nos interesa que conozcamos los procedimientos y aprendamos a resolver algunos ejemplos típicos. Limitaremos nuestras explicaciones a los casos y temas que puedan tener aplicación en los libros técnicos de que hemos hablado ya otras veces, dejando de lado lo que sólo constituiría una ejercitación matemática pura. Pongamos pues manos a la obra.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En el capítulo 4, sección 39, hemos estudiado las ecuaciones algebraicas más simples, es decir aquellas que tenían una sola cantidad desconocida, a la que llamamos *incógnita*, con la facilidad adicional de que esa incógnita aparecía sin exponente, es decir sin estar elevada a ninguna potencia. Podría estar sumada, restada, multiplicada o dividida por cualquier cantidad, pero no se indicaban ni potencias ni raíces que afectaban a la incógnita. Esas ecuaciones se llaman de *primer grado*. Cualquiera que sea la cantidad de términos y operaciones indicadas, la ecuación se resuelve despejando la incógnita, reemplazando las letras conocidas por sus equivalentes numéricos y haciendo las operaciones indicadas; en otras palabras, siempre llegamos a un final que se escribe así:

$$x = \ldots.$$

donde los puntos suspensivos representan unas cuantas operaciones aritméticas de cualquier tipo, inclusive potencias y raíces, ya que estas dos últimas operaciones pueden afectar a los números pero no a la incógnita en las ecuaciones de primer grado. De modo pues que cualquiera sea la cantidad de términos o la serie de operaciones indicadas en cada miembro de una ecuación, siempre que haya una sola incógnita es posible despejarla y determinar su valor.

Ocurre a veces que en una ecuación aparecen dos cantidades desconocidas, es decir que se tienen dos incógnitas. Evidentemente no se puede aplicar en tal caso el procedimiento anterior, pues se tendría la imposibilidad de calcular el valor de una de las incógnitas si no se conoce el de la otra.

Sea por ejemplo una ecuación en la cual hay dos incógnitas, y que para distinguirlas les atribuimos las letras x e y.

$$4\,a\,x + 3\,b = 12\,y$$

En esta ecuación se tienen dos incógnitas,

y si se despeja una de ellas, la x por ejemplo, se tiene:

$$4\,a\,x = 12\,y - 3\,b$$

$$x = \frac{12\,y - 3\,b}{4\,a}$$

Y en el supuesto caso de que se conozcan los valores de b y de a, ya que no son incógnitas, no es posible determinar el valor de x mientras no se conozca el de y, que aparece en el segundo miembro.

Para poder resolver una ecuación con dos incógnitas hay que conocer la relación que existe entre ellas o bien disponer de otra ecuación que las vincule entre sí. En otras palabras, si se tienen dos incógnitas deben existir dos ecuaciones que las contengan.

Supongamos en el ejemplo anterior que se tenga además de la propuesta la segunda ecuación siguiente:

$$y = 2\,x - 3$$

En tal caso basta reemplazar el valor de y en la primera ecuación, es decir sustituir una de las incógnitas por su valor equivalente, para poder hallar una solución definitiva. Pero antes de explicar la manera de resolver estos casos debemos hacer otras observaciones.

60. — Sistemas de ecuaciones

Quedó claro que si tenemos dos incógnitas necesitamos dos ecuaciones que las vinculen para determinar el valor de cada incógnita. Siguiendo el mismo razonamiento encontraríamos que si tenemos tres incógnitas hacen falta tres ecuaciones para resolver el sistema y así continuaríamos hasta deducir que el número de incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones planteadas para poder determinar el valor de cada incógnita. Si a las incógnitas les asignamos siempre las últimas letras del alfabeto, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 15 \\ x - y - 0{,}2\,z &= 0 \\ -7\,x + 20 &= y + 2z \end{aligned}$$

tiene tres incógnitas y como hay tres ecuaciones que las vinculan se puede resolver. Claro está que esas ecuaciones deben ser arregladas u ordenadas un poco, pero eso ya corresponde a los métodos de resolución. Por ahora determinamos que el sistema puede ser resuelto; en cambio si hay tres incógnitas y solamente dos ecuaciones, no se puede resolver.

61. — Arreglo de las ecuaciones

Antes de resolver un sistema de ecuaciones, lo que equivale a decir que determinaremos el valor final de todas sus incógnitas, conviene explicar algunas operaciones previas que se pueden hacer para facilitar la tarea; parte de este tema ya ha sido tratado en el capítulo 4, sección 41, cuando dijimos que se podía alterar el orden de los términos de una ecuación y otras cosas. Veamos otras posibilidades del arreglo previo de ecuaciones.

Se puede cambiar de signo a toda una ecuación sin que ésta se altere. Supongamos que se tenga una ecuación expresada así:

$$-x - 2\,y + 4 = 6 - z$$

y que por comodidad nos convendría que los signos de las incógnitas fueran positivos y no negativos. Pueden cambiarse los signos siempre que esa operación afecte a todos los términos de la ecuación; la misma quedaría así:

$$x + 2\,y - 4 = z - 6$$

y obsérvese que en el segundo miembro de la ecuación, después de cambiar los signos hemos alterado el orden de los términos, cosa que sabemos que se puede hacer por haberlo visto en el capítulo 4. La ecuación que ahora tenemos es equivalente a la anterior.

Se puede multiplicar a una ecuación por una cantidad fija, siempre que la misma no sea una incógnita, sin que la ecuación se altere. Por ejemplo, si tenemos una ecuación como ésta:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} - 5 = 0$$

vemos enseguida que simplificaríamos mucho las cosas si no aparecieran los divisores. Tomamos el mayor o uno que divida a ambos divisores, en este caso el 4 y multiplicamos todos los términos por esa cifra fija, obteniendo:

$$2\,x + y - 20 = 0$$

porque el primer término, al multiplicar por 4 y dividir por 2 queda 2; el segundo término se multiplica por 4 y había un divisor 4 que se simplifican; el tercer término queda multiplicado directamente por 4 y el segundo miembro es un cero, que multiplicado por 4 queda en cero.

Se puede dividir una ecuación por una cantidad fija, siempre que no sea una incógnita.

Por ejemplo, si tenemos la siguiente ecuación:

$$6x + 2y - 8 = 0$$

vemos que puede dividirse toda la ecuación por 2 y habremos hecho una simplificación que nos da la ventaja de que una de las incógnitas nos queda sin factor o coeficiente alguno. Se dividen todos los términos por 2 y obtenemos:

$$3x + y - 4 = 0$$

donde el segundo miembro, que es un cero, al ser dividido por 2 queda siempre en cero.

Se puede elevar toda una ecuación a una potencia dada sin que la misma se altere. Ello se hará si el arreglo representa una ventaja. Veamos un caso dado por la siguiente ecuación:

$$\sqrt{4x} = \sqrt{y}$$

y tenemos una ecuación que no es de primer grado; pero si elevamos toda la ecuación al cuadrado tenemos:

$$(\sqrt{4x})^2 = (\sqrt{y})^2$$
$$4x = y$$

y hemos llegado a una ecuación de primer grado, pues se han eliminado las operaciones de exponentes fraccionarios de las incógnitas.

Se puede extraer la raíz de una ecuación sin que la misma altere. El caso es similar al anterior y se usa para simplificar las cosas y no para complicarlas. Sea la ecuación:

$$4x^2 - y^2 = 0$$

y vemos que tenemos una ecuación en la que las incógnitas tienen exponentes y por consiguiente no es de primer grado; adelantamos que es de segundo grado, por ser el número 2 ese exponente. Si cambiamos de miembro el segundo término para evitar una operación más complicada, tenemos:

$$4x^2 = y^2$$

y si ahora extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación, la misma no altera; se tiene:

$$\sqrt{4x^2} = \sqrt{y^2}$$
$$2x = y$$

y ahora la ecuación es de primer grado. Claro está que no siempre la operación de arreglo de una ecuación será tan simple, pero si nos conduce a una simplificación o a la posibilidad de resolución por métodos simples, vale la pena hacer tal arreglo.

62. — Resolución de los sistemas. Método de sustitución

Los sistemas de ecuaciones de primer grado pueden ser resueltos por tres métodos llamados *sustitución*, *igualación* y *determinantes*. En la práctica corriente empleada en la técnica, donde son comunes los sistemas de dos ecuaciones y muy ocasional que aparezca uno de tres y no más, se usan los dos primeros métodos. El que usa determinantes es ventajoso únicamente para sistemas de muchas ecuaciones; no obstante lo explicaremos brevemente.

El método de *sustitución* consiste en reemplazar en una de las ecuaciones el valor de una de las incógnitas por su equivalente deducido de la otra. Por ejemplo, sean las dos ecuaciones:

$$x + 2y = 6$$
$$2x - 3y = 0$$

Es evidente que de la primera ecuación es fácil despejar el valor de x que resulta:

$$x = 6 - 2y \qquad \text{(A)}$$

y este valor se reemplaza en la segunda ecuación, es decir *sustituimos* en esa segunda ecuación a la incógnita x por su valor equivalente sacado de la primera:

$$2(6 - 2y) - 3y = 0$$

y ahora tenemos una ecuación de primer grado con una sola incógnita, la y, en la cual se determina fácilmente el valor de ella. Para tal fin, hacemos primero las operaciones indicadas por el factor común 2:

$$12 - 4y - 3y = 0$$

Ahora simplificamos la ecuación, ya que tenemos dos términos con y:

$$12 - 7y = 0$$

y ahora despejamos el término que tiene la incógnita:

$$-7y = -12$$

Podemos cambiar el signo a toda la ecuación sin que ésta altere, teniéndose:

$$7y = 12$$
$$y = \frac{12}{7}$$

Este valor de y se lleva a la ecuación primera, pero después de arreglada para despejar x, o sea la marcada con la letra (A) y se tiene:

$$x = 6 - \frac{2 \times 12}{7} = 6 - 3{,}42 = 2{,}58$$

Y hemos calculado el valor numérico de las dos incógnitas. No siempre las ecuaciones tienen coeficientes numéricos, pues pueden tener letras, las cuales no se consideran incógnitas por conocerse sus equivalentes numéricos. Son las ecuaciones generales; la solución de los sistemas se hace por el mismo procedimiento antes indicado, sustituyendo el equivalente de una incógnita en una de las ecuaciones. Unos ejemplos nos demostrarán cómo se generaliza el procedimiento.

Ejemplo: Tomemos dos ecuaciones y hallemos el valor de cada una de las dos incógnitas, suponiendo que a vale 3 y b vale 4.

Solución

$$4\,a\,x + 3\,b = 12\,y$$
$$y = 2\,x - 3$$

Basta reemplazar el valor de y de la segunda ecuación en la primera para obtener una sola incógnita:

$$4\,a\,x + 3\,b = 12\,(2\,x - 3)$$

Ahora se debe sacar el paréntesis haciendo las operaciones indicadas.

$$4\,a\,x + 3\,b = 24\,x - 36$$
$$4\,a\,x - 24\,x = -36 - 3\,b$$

Reemplazando a y b por sus valores:

$$4 \times 3\,x - 24\,x = -36 - 3 - 3 \times 4$$
$$12\,x - 24\,x = -36 - 12$$
$$-12\,x = -48$$

Despejando ahora la incógnita se tiene:

$$x = \frac{-48}{-12} = \frac{48}{12} = 4$$

Ahora se coloca el valor de x en la segunda ecuación para encontrar el de y.

$$y = 2\,x - 3$$
$$y = 2 \times 4 - 3$$
$$y = 8 - 3$$
$$y = 5$$

No siempre una de las ecuaciones da directamente despejado el valor de una de las incógnitas, pues en el caso anterior pudo ocurrir que se tuviera como segunda ecuación la siguiente:

$$y - 2\,x + 3 = 0$$

En cuyo caso se debió previamente despejar el valor de y.

En otro ejemplo tomaremos un caso típico en la Electrotecnia a efecto de poner en evidencia la simplicidad de procedimiento.

Ejemplo: Se desea determinar la resistencia de una lámpara eléctrica de 60 Watt que está conectada a la red de 220 Volt.

Solución

La Electrotecnia nos da la ecuación que vincula la resistencia R con la tensión E y la corriente I:

$$I = \frac{E}{R}$$

Donde el valor de E es conocido porque vale 220 Volt. En cambio el valor de I no es conocido y en consecuencia es una incógnita. Debe buscarse pues una segunda ecuación, que vincule la potencia W con la corriente I, y esa ecuación también la da la Electrotecnia; es:

$$W = E\,I$$

Ahora puede emplearse el método de sustitución, reemplazando en la primera ecuación el I obtenido de esta segunda. Tal valor es:

$$I = \frac{W}{E}$$

Que llevado a la primera ecuación resulta:

$$\frac{W}{E} = \frac{E}{R}$$

De donde ahora puede despejarse el valor de R, pasándolo al primer miembro como factor y enviando al segundo miembro las cantidades que figuran en el primero. En el primer paso se obtiene:

$$\frac{R\,W}{E} = E$$

En el segundo paso:

$$R = \frac{E\,E}{W}$$

$$R = \frac{E^2}{W}$$

Y como E vale 220 y W vale 60, se tiene:

$$R = \frac{220 \times 220}{60} = 806{,}66$$

Con lo que queda resuelto el problema.

63. — Método de igualación

Este segundo método para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es en cierto modo similar al anterior, y consiste en despejar una de las incógnitas en las dos ecuaciones e igualar sus equivalentes. Nos queda así una ecuación de primer grado con una incógnita en la que se puede fácilmente determinar el valor de ella; luego, calculamos la otra usando la más simple de las ecuaciones arregladas.

Un ejemplo nos aclarará mejor el procedimiento. Sean las dos ecuaciones:

$$4x + y - 8 = 0$$
$$x - 2y + 4 = 0$$

Ahora despejamos el valor de x, por ejemplo, en la primera ecuación; el primer paso es dejar el término que la contiene en el primer miembro y pasar los demás al segundo:

$$4x = 8 - y$$

Luego, pasamos el factor 4 al segundo miembro como divisor:

$$x = \frac{8 - y}{4}$$

Ahora tomamos la segunda ecuación y hacemos lo mismo, pasando al segundo miembro los términos que no tienen esa incógnita x:

$$x = 2y - 4$$

Y entonces igualamos las equivalencias de x en las dos ecuaciones arregladas y se tiene:

$$\frac{8 - y}{4} = 2y - 4$$

Para resolver ahora una simple ecuación de primer grado con una incógnita, la y, que se hace en los siguientes pasos: primero pasamos el divisor 4 al segundo miembro como factor:

$$8 - y = 8y - 16$$

Luego, pasamos al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los que no la tienen:

$$-y - 8y = -16 - 8$$
$$-9y = -24$$

Cambiando el signo de toda la ecuación y pasando el factor 9 al otro miembro queda determinado el valor de y:

$$y = \frac{24}{9} = 2{,}66$$

Y para calcular el valor de x reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones arregladas este valor de y; elegimos la segunda por ser más cómoda y se tiene:

$$x = 2 \times 2{,}66 - 4 = 5{,}32 - 4 = 1{,}32$$

Con lo que queda terminado el problema. En la práctica se elegirá el método de sustitución o el de igualación según convenga, pues ambos dan el mismo resultado.

64. — Sistemas de más de dos incógnitas

Si bien hemos aclarado que en la técnica no es frecuente que se presenten casos de sistemas de más de dos incógnitas, pondremos un ejemplo para mostrar el procedimiento, el cual puede ser el de sustitución, el de igualación o uno mixto. Sean las tres ecuaciones siguientes, que contienen tres incógnitas, como es natural, aunque las tres no aparezcan forzosamente en todas ellas:

$$x + y = 18 \qquad \text{(A)}$$
$$2x - z = 5 \qquad \text{(B)}$$
$$y - 2z = 0 \qquad \text{(C)}$$

Como primera medida despejamos x de la (A) e y de la (C) y se tiene:

$$x = 18 - y \qquad \text{(D)}$$
$$y = 2z \qquad \text{(E)}$$

Ahora reemplazamos el valor de x de la (D) en la ecuación (B):

$$2(18 - y) - z = 5$$

en cuya ecuación reemplazamos por y su equivalente de la (E):

$$2(18 - 2z) - z = 5$$

y resolvemos esta ecuación que nos dará el valor numérico de z. Primero sacamos el paréntesis:

$$36 - 4z - z = 5$$

Ahora ordenamos los términos en z en el primer miembro y los otros en el segundo:

$$-4z - z = 5 - 36$$
$$-5z = -31$$

Cambiando signo a toda la ecuación y despejando z obtenemos:

$$z = \frac{31}{5} = 6{,}2$$

Este valor de z lo llevamos a la ecuación (E) y obtenemos el de y:

$$y = 2 \times 6{,}2 = 12{,}4$$

Y este valor de y lo llevamos a la ecuación (D) para tener el de x:

$$x = 18 - y = 18 - 12{,}4 = 5{,}6$$

Con lo que el sistema ha quedado resuelto. Como se ve resulta un poco más largo que en el caso de dos ecuaciones. Cuando en lugar de tres son más ecuaciones, ya los métodos de sustitución o igualación se hacen engorrosos y por eso se recurre a otro, que hemos mencionado al principio pero que para nuestro caso carece de interés.

Pongamos otro ejemplo que servirá de ejercitación, pero en el que las tres ecuaciones necesarias para resolver un sistema con tres incógnitas sean completas, es decir contengan esas tres incógnitas. Sea el sistema:

$$x + y + z = 6 \qquad (A)$$
$$2x - y + 3z = 9 \qquad (B)$$
$$-x + 4y + z = 10 \qquad (C)$$

Apliquemos el método de igualación entre las dos primeras ecuaciones, despejando en ambas el valor de x; con la (A) tenemos:

$$x = 6 - y - z \qquad (D)$$

y con la (B), haciendo lo mismo se obtiene:

$$x = \frac{9 - 3z + y}{2} \qquad (E)$$

Y ahora, de acuerdo con el método de igualación, tomamos los dos segundos miembros de las ecuaciones (D) y (E) y los igualamos:

$$6 - y - z = \frac{9 - 3z + y}{2}$$

en cuya igualdad podemos multiplicar a toda la ecuación por 2 para eliminar el divisor:

$$12 - 2y - 2z = 9 - 3z + y$$

que puede ser simplificada agrupando los términos semejantes en el primer miembro y pasando al segundo los numéricos:

$$-3y + z = -3 \qquad (F)$$

Hemos llegado así a una ecuación con dos incógnitas, la y y la z. Necesitamos otra ecuación con esas mismas incógnitas; si reemplazamos en la (C) el valor de x de la (D) tenemos lo que buscamos, pero obsérvese que en la (C) la x está con signo negativo, de modo que debemos cambiar el signo a la (D):

$$-6 + y + z + 4y + z = 10$$

donde vemos que, previo ordenamiento de la ecuación, nos quedará una de primer grado con las mismas incógnitas que la (F):

$$5y + 2z = 16 \qquad (G)$$

Y ahora tenemos dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, (F) y (G) que sabemos resolver. Adoptamos el método de sustitución y damos el proceso sin explicaciones por ser conocido:
de la (F) sacamos:

$$z = 3y - 3 \qquad (H)$$

que reemplazamos en la (G):

$$5y + 2(3y - 3) = 16$$
$$5y + 6y = 22$$
$$11y = 22$$

$$y = \frac{22}{11} = 2 \quad \text{(valor de } y)$$

valor que reemplazamos en la (H):

$$z = 3 \times 2 - 3 = 6 - 3$$
$$z = 3 \quad \text{(valor de } z)$$

Y ahora en la (D) obtenemos x, con lo que termina el problema:

$$x = 6 - 2 - 3 = 1 \quad \text{(valor de } x)$$

65. — Resolución por determinantes

Hay otro procedimiento para resolver los sistemas de ecuaciones de primer grado, el cual presenta reales ventajas cuando se trata de más de dos ecuaciones; no obstante lo explicaremos para el caso de dos incógnitas, que es el más necesario en la técnica. Antes de aplicarlo a la resolución del sistema de ecua-

ciones debemos definirlo. Si se tienen dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en forma genérica, completas:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

se llama *matriz determinante* o directamente determinante de ese conjunto a una operación que se hace con los coeficientes de las incógnitas y que se escribe con la notación especial:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

y cuyo valor matemático se determina mediante la multiplicación en cruz de las cantidades dentro de la matriz, restando el primer producto y el segundo, en la siguiente forma:

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Fijada la definición que antecede, veamos para qué nos sirve en la resolución de ecuaciones de primer grado. Tomemos las dos ecuaciones propuestas y multipliquemos a la primera por b_2 y a la segunda por b_1 y hagamos la resta ordenada de ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{l} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ - \quad a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = c_2 b_1 \\ \hline a_1 b_2 x - a_2 b_1 x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

y vemos que se han eliminado al restar los términos en y por ser iguales. Ahora sacamos factor común x:

$$x (a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

Y nos resultará fácil despejar el valor de la incógnita, pasando todo el paréntesis al segundo miembro:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

De la observación de la fórmula que nos da el valor de la incógnita x deducimos que ella sale de dos determinantes; el del denominador es el clásico que escribimos más arriba y el del numerador es otro determinante en el cual se reemplaza la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes. De esto se deduce que podemos escribir el valor de la incógnita x en la siguiente forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Procediendo de idéntica manera para la incógnita y, es decir multiplicando la primera ecuación por a_2 y la segunda por a_1, restando ordenadamente y sacando factor común y se tiene:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Con lo que formamos el determinante para la incógnita y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Veamos un ejemplo aplicado al sistema de dos ecuaciones:

$$3x - 4y = 5$$
$$-x + 2y = -3$$

Y aplicaremos los determinantes, cuidando de conservar en cada caso los signos de los coeficientes numéricos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{2}$$

$$x = \frac{5 \times 2 - [-3 \times (-4)]}{3 \times 2 - [(-1) \times (-4)]}$$

$$x = \frac{10 - 12}{6 - 4} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{3 \times (-3) - (-1) \times 5}{2}$$

$$y = \frac{-9 + 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Valores que reemplazados en las ecuaciones dadas las satisfacen, como puede comprobarlo el lector.

Día 8

Hemos avanzado un poco más en el Algebra y ya sabemos resolver los sistemas de ecuaciones de primer grado con más de una incógnita, dos, tres, etc. Se ha visto que a medida que el número de incógnitas aumenta, el proceso se torna más laborioso, pero siempre es comprensible. Es cuestión de munirse de paciencia y proceder paso a paso de acuerdo con las explicaciones y los ejemplos que se han dado. Pero una vez más advertimos que en la técnica no encontraremos frecuentemente casos complicados de sistemas de ecuaciones, tal vez nos encontremos con casos de dos incógnitas, excepcionalmente con tres; de todos modos debíamos tratar el tema por ser necesario para explicaciones posteriores de nuestra misma materia.

Ahora volveremos un poco a la Aritmética, pero a lo que podría ya denominarse como avanzada. La necesidad de este tema, los logaritmos, se hace evidente cuando debe calcularse una potenciación fraccionaria o una raíz de orden grande o fraccionaria; por ejemplo, no sabemos calcular la potencia 3,5 de un número ni la raíz séptima y ahora podremos resolver esos casos y otros de ese tipo en cuanto aprendamos a manejar los logaritmos. Como se puede intuir, el tema nos resultará harto interesante.

OPERACIONES CON LOGARITMOS

En la descripción de las operaciones aritméticas y en la práctica usual de las mismas, salta a la vista la mayor simplicidad de unas con respecto a las otras, cuando no la imposibilidad material de realizar una operación determinada. Tal sería el caso de elevar un número a una potencia fraccionaria, o extraer la raíz séptima, undécima, etc., de una cantidad. Para solucionar las cuestiones así planteadas y para facilitar o simplificar las operaciones aritméticas surgió la aplicación práctica de los logaritmos, debidos a Napier y Briggs.

Con ellos es posible reemplazar los productos y cocientes por sumas y restas, y las potencias y raíces por productos y cocientes respectivamente. Si bien las dos primeras operaciones no requieren los logaritmos como auxiliares indispensables, la última muchas veces les asigna ese carácter. Por ello queda justificada la inclusión de este capítulo en este libro.

66. — Definición de logaritmos

Puede definirse escuetamente al logaritmo como al exponente de la potencia a la cual hay que elevar una cantidad fija o *base* para obtener un número determinado. Así, si se toma como base el número 10, tenemos:

$$10^2 = 100$$

Y por definición diremos que 2 es el log. de 100, puesto que a la base 10 hay que elevarla a la potencia 2 para obtener el número dado: 100. Lo dicho se escribe:

$$\log.\ 100 = 2$$

Se ha dicho que se tomaba el número 10 como base, pero ello no es obligatorio, pues puede usarse cualquier otro, basta que se conserve en todos los cálculos. En la escritura se indica la base empleada colocándola como subíndice de la abreviatura simbólica, en la siguiente forma:

$$\log._{10}\ 100 = 2$$

Que se lee logaritmo de base 10 del número 100, igual 2.

En la práctica sólo se emplean dos bases, tomando otros tantos sistemas de logaritmos. Uno adopta como base el número 10, y se denomina sistema de *logaritmos decimales* o

de Briggs. El otro adopta como base una cantidad que vale 2,7182818..., que se simboliza con la letra *e*, y se denomina: de *logaritmos naturales o neperianos*. No se piense que una base complicada da el mismo carácter a los logaritmos, pues en la práctica resulta igual usar uno u otro sistema.

Resumiendo:

decimales: base = 10
neperianos: base = e = 2,71828

67. — Cuestiones fundamentales

Para simplificar la exposición nos referiremos a los logaritmos decimales, ya que son los más comunes cuando no hay exigencia matemática de usar los naturales.

Si analizamos la definición de logaritmo, veremos que el logaritmo de la base da siempre la unidad, es decir:

$$\log._{10} 10 = 1$$

Puesto que por dicha definición debemos tener que el logaritmo es el exponente de la potencia a que debe elevarse el número propuesto.

De idéntica manera se deduce que el logaritmo, de cualquier base, de la unidad da cero, es decir:

$$\log._{10} 1 = 0 \qquad \text{porque } 10^0 = 1$$

Ya que cualquier cantidad elevada a cero da la unidad, y en este caso ese exponente cero es precisamente el logaritmo del número 1.

Las dos cuestiones planteadas permiten distinguir en el uso a las tablas de logaritmos, y es que para la práctica matemática se dispone de tablas que contienen los logaritmos de todos los números usuales. Para saber si una tabla es de logaritmos decimales o naturales, se observa cual es el número cuyo logaritmo da exactamente la unidad pues ese número es la base de los logaritmos de la tabla.

68. — Equivalencia entre los sistemas

A título informativo conviene saber cómo se obtiene un logaritmo natural partiendo del decimal y viceversa, puesto que en la práctica se dispone generalmente de una sola tabla. En tal caso se tiene:

$$\log._e A = 2{,}3026 \log._{10} A$$
$$\log._{10} A = 0{,}4343 \log._e A$$

Es decir que si se tiene un logaritmo decimal de la cantidad A, obtenido de la tabla, para hallar el logaritmo neperiano no hay más que multiplicarlo por 2,3026. Asimismo, si se tiene el logaritmo natural de una cantidad A, para obtener el decimal se multiplica por 0,4343.

69. — Tabla de logaritmos

Para hacer una tabla de logaritmos hay que tener en cuenta las definiciones dadas anteriormente, aunque es evidente que las tablas se encuentran hechas. A efecto de ver cómo se plantea la construcción de la tabla, veamos algunos logaritmos clásicos para el sistema decimal:

10^4	= 10.000	luego log.	10.000	=	4
10^3	= 1.000	luego log.	1.000	=	3
10^2	= 100	luego log.	100	=	2
10^1	= 10	luego log.	10	=	1
10^0	= 1	luego log.	1	=	0
10^{-1}	= 0,1	luego log.	0,1	=	— 1
10^{-2}	= 0,01	luego log.	0,01	=	— 2
10^{-3}	= 0,001	luego log.	0,001	=	— 3
10^{-4}	= 0,0001	luego log.	0,0001	=	— 4

Es decir que los logaritmos son números enteros cuando corresponden a exponentes enteros de la base. Si en cambio se tiene el número 162, su logaritmo será mayor que 2 y menor que 3. De la tabla se obtiene:

$$\log. 162 = 2{,}2095$$

De manera que el logaritmo de un número está formado por dos partes: la entera y la decimal. La entera, que en el ejemplo propuesto es el 2, se llama *característica*. La decimal, o sea la fracción 2095 se llama *mantisa*.

Como hemos deducido y como resulta de la observación de la tabla puesta como modelo, la característica de un logaritmo es un número que tiene siempre una unidad menos que la cantidad de cifras enteras tenga el número cuyo logaritmo se desea buscar.

Si el número en estudio es un decimal, la característica del logaritmo es negativa y mayor en una unidad que el número de ceros que tiene el número propuesto. Por ejemplo, si se tiene el número 0,0395, su logaritmo tendrá por característica la cifra —2, ya que hay un cero después de la coma. Es decir:

$$\log. 0{,}0395 = -2{,}5966$$
$$\log. 0{,}471 = -1{,}6721$$
$$\log. 0{,}00097 = -4{,}9868$$

En los ejemplos anteriores se ha colocado además de la característica, la mantisa que fue obtenida de la tabla de logaritmos decimales, a título ilustrativo.

70. — Características negativas

Como propiedad muy importante debe destacarse que los números negativos no tienen logaritmo. En efecto, a cualquier potencia que se eleve la base, el resultado es siempre positivo. Por ejemplo, supongamos que se desea hallar el logaritmo del número (— 5).

Tomemos logaritmos de base 10 del número 5, sin considerar el signo:

$$\log. 5 = 0{,}699$$

Y ahora tomemos la ecuación exponencial:

$$10^{0{,}699} = 5$$

Es decir queda 5 positivo. Si tomamos negativo el logaritmo.

$$10^{-0{,}699} = \frac{1}{10^{0{,}699}} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

Tampoco da el número (—5). Por lo tanto, es evidente que el número (— 5) no tiene logaritmo. Y en general, ningún número negativo tiene logaritmo. Para evitar errores de concepto, cuando una característica es negativa, el signo menos se escribe sobre la misma, para indicar que no afecta a la mantisa, ya que ésta es siempre positiva. De manera que el logaritmo de 0,027 se escribe:

$$\log. 0{,}027 = \overline{2}{,}4314$$

Y se sobreentiende que este logaritmo significa una característica negativa sumada a una mantisa positiva:

$$\overline{2}{,}4314 = -2 + 0.4314$$

Lo cual debe tenerse muy en cuenta al operar con logaritmos, según veremos más adelante.

71. — Búsqueda en la tabla

En estas páginas encontrará el lector una tabla de logaritmos decimales a doble entrada, que tiene la ventaja de su menor extensión con respecto a las de simple entrada. Su simplicidad se apoya en una de las más importantes propiedades de logaritmos decimales, que constituye la ventaja indiscutible sobre los naturales.

Esta propiedad dice que: Las mantisas de los logaritmos de distintos números que tengan iguales cifras significativas son iguales. Por ejemplo:

$$\log. 0{,}0425 = \overline{2}{,}6284$$

$$\log. 0{,}425 = \overline{1}{,}6284$$

$$\log. 4{,}25 = 0{,}6284$$

$$\log. 425 = 2{,}6284$$

$$\log. 42500 = 4{,}6284$$

Como se ve en los ejemplos propuestos, las cifras significativas de los números cuyo logaritmo se desea buscar son coincidentes, pues están formadas siempre por el terceto 425. Por ello coinciden las mantisas de todos los logaritmos. La diferencia en las características permite distinguir que se trata de logaritmos de números distintos, y ya se sabe cómo se determina cada característica.

Esta propiedad permite acortar notablemente las tablas de logaritmos pues basta construirlas para números de 0 a 1000 en las de simple entrada o de 0 a 100 en las de doble entrada. Para buscar un logaritmo se toman las tres primeras cifras significativas del número propuesto y se busca el que le corresponde a ellas, colocando esta mantisa a la característica deducida del número propuesto. Por tal motivo las tablas modernas sólo dan las mantisas, omitiendo las características.

72. — Uso de la tabla de doble entrada

Hemos preferido la tabla de doble entrada por su extensión más reducida. Por tal motivo nos ocuparemos de describir este tipo de tabla.

La primera columna de la tabla tiene los números de 10 a 99, y las diez columnas siguientes dan la tercera cifra significativa. Hay todavía nueve columnas auxiliares para poder disponer de una cifra significativa y ampliar la exactitud en el uso de la tabla. Con este artificio, la tabla propuesta equivale a una de simple entrada de 10.000 números.

Salta a la vista la ventaja positiva de la tabla que proponemos, puesto que en su reducida extensión reemplaza con eficacia a una de simple entrada de un centenar de páginas.

Veamos cómo se emplea esta tabla. Para ello diremos que se presentan tres casos, según el número cuyo logaritmo se desea encontrar tenga 2, 3 ó más cifras significativas. Si lo que está dado es el logaritmo y hay que

hallar el número, se presentan dos casos, según se encuentra exactamente el logaritmo en la tabla o no ocurra ello.

Ejemplo 1: Hallar el logaritmo del número 24, o bien del 0,024 ó 24.000, es decir, siempre dos cifras significativas solamente:

Solución

Buscamos en la primera columna el número 24; se encuentra en la siguiente la mantisa 3802. Luego se tiene:

$$\log 24 = 1{,}3802$$

$$\log 24000 = 4{,}3802$$

$$\log 0{,}024 = \overline{2}{,}3802$$

De modo que cuando se tienen sólo dos cifras significativas, se busca el número en la primera columna y la mantisa en la segunda.

Ejemplo 2: Hallar el logaritmo del número 678, del 6,78 ó del 0,678.

LOGARITMOS DECIMALES

Nº	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Solución

En la primera columna de la tabla sólo se encuentran las dos primeras cifras significativas o sea el 67, pero en lugar de leer el logaritmo en la segunda columna, se lo lee en la columna del 8, resultando la mantisa 8312. Luego:

$$\log 678 = 2{,}8312$$

$$\log 6{,}78 = 0{,}8312$$

$$\log 0{,}678 = \overline{1}{,}8312$$

De manera pues que con las dos primeras cifras, se busca en la primera columna el renglón a utilizar, leyendo la mantisa en la columna que corresponde a la tercera cifra significativa dentro del renglón.

Ejemplo 3: Hallar el logaritmo del número 8574 o de cualquier otro que tenga estas mismas cifras.

Solución

Se entra en la tabla por la primera columna buscando el 85, o sea las dos primeras cifras

LOGARITMOS DECIMALES (continuación)

Nº	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4

significativas y se lee en ese renglón, por la columna del 7, la mantisa provisoria: 9330. La cuarta cifra permite elegir una de las columnas auxiliares del final de la tabla. En ese mismo renglón y columna auxiliar del 4 leemos la mantisa adicional 2. Luego la mantisa definitiva es la suma de la provisoria y la adicional.

$$9330 + 2 = 9332$$

Ahora el logaritmo se escribe en la forma conocida:

$$\log 8574 = 3{,}9332$$

Como se ha visto, el procedimiento tiene cuatro pasos: uno para buscar el renglón con las dos primeras cifras significativas. El segundo para buscar la columna con la tercera cifra significativa y hallar así la mantisa provisoria y el cuarto que se busca con la cuarta cifra significativa una columna auxiliar y en el mismo renglón encuentra lo que se sumará a la mantisa provisoria para tener la definitiva.

Ejemplo 4: Sea hallar el logaritmo del número 182542 o uno que tenga estas mismas cifras significativas.

Solución

Por el procedimiento empleado en el ejemplo anterior sabemos proceder hasta la cuarta cifra significativa, es decir hallar la mantisa que corresponde a la cantidad 1825.

$$\text{mantisa de } 1825 = 2601 + 12 = 2613$$

Pero queda todavía la cifra 42 con la cual se procede de la siguiente manera.

La cantidad adicional 12 encontrada en la columna auxiliar del 5 permite observar que su contigua en el renglón es 14. Luego la diferencia entre 12 y 14 es 2, de cuyo total debe tomarse una fracción correspondiente a 42 unidades de 100.

Esto se justifica diciendo que si la cuarta cifra significativa hubiera sido 6 en vez de 5 se habría tomado el adicional 14, pero no llega a ser 6 sino que puede decirse que es 5,42. En consecuencia puede aproximarse tomando 13 en lugar de 14 que es lo más cercano. En definitiva la mantisa resulta ser:

$$2601 + 13 = 2614$$

Y el logaritmo de la cantidad propuesta es

$$\log 182542 = 5{,}2614$$

Ejemplo 5: Se trata de hallar el número cuyo logaritmo es $\overline{1}{,}5378$.

Solución

Buscando en la tabla 5378 se la encuentra en el renglón del número 34 y bajo la columna 5. Luego las cifras significativas del número buscado son:

3 4 5

Como la característica es — 1 el número no tiene ningún entero y es:

0,3 4 5

Es decir que si el logaritmo propuesto tiene su mantisa exacta en la tabla basta leer las tres cifras que lo forman y aplicar la reducción de la característica para tener el resultado.

Ejemplo 6: Hallar el número cuyo logaritmo es 2,7208.

Solución

Buscando en la tabla encontramos la mantisa más próxima y menor 7202 que le faltan 6 unidades para ser igual a la propuesta. Corresponden al renglón del número 52 y columna 5. En consecuencia las tres primeras cifras del número buscado serán 525.

Ahora buscamos en el mismo renglón y columnas auxiliares esa diferencia de 6 unidades en la mantisa y vemos que está en la columna auxiliar del 7. Luego la cuarta cifra significativa del número buscado será 7, quedando:

5257

Como la característica del logaritmo es 2, este número debe tener tres cifras enteras, quedando en definitiva:

525,7

Que es el número cuyo logaritmo vale 2,7208.

**73. — Operaciones con logaritmos
Logaritmo del producto**

Por definición, el logaritmo del producto de dos cantidades es igual a la suma de los logaritmos de las mismas. Para demostrar la veracidad de esta afirmación no hay más que tomar dos números cualesquiera, y escribir con ellos la ecuación exponencial:

$$10^a = 80$$
$$10^b = 120$$

Donde 80 y 120 son los números y *a* y *b*

sus logaritmos. Si se multiplican ambas ecuaciones entre sí se tiene:

$$10^a \times 10^b = 80 \times 120$$

Y de acuerdo con las propiedades de las potencias

$$10^{a+b} = 80 \times 120$$

Con lo que es evidente que si:

$$\log.\ 80 = a$$
$$\log.\ 120 = b$$

Resulta:

$$\log (80 \times 120) = a + b = \log 80 + \log 120$$

Y si en general se tuviera muchos factores y no dos de ellos, se aplicaría la misma regla, es decir:

$$\log (A\,B\,C\,D) =$$
$$= \log A + \log B + \log C + \log D$$

Ejemplo: Supongamos que se quiera resolver por logaritmos el siguiente producto:

$$273{,}5 \times 0{,}0472.$$

Solución

Primeramente hallamos en la tabla los logaritmos de ambos factores, en la forma descripta:

$$\log 273{,}5 = 2{,}4370$$

Hallado en el renglón del 27 columna del 3 y sumado a la mantisa 4362 el adicional 8.

$$\log 0{,}0472 = \overline{2}{,}6739$$

Hallado en el renglón 47 y columna del 2. Ahora se aplica la regla general, sumando los dos logaritmos hallados.

$$\begin{array}{r} 2{,}4370 \\ + \quad \overline{2}{,}6739 \\ \hline 1{,}1109 \end{array}$$

Porque al sumar el 4 con el 6, más una unidad que llevábamos, obtuvimos 11; escribimos el 1 y llevamos una unidad que sumada al 2 dio 3. Entonces $+3 + -2$ es igual a $+3 - 2 = 1$. En resumen:

$$2{,}4370 + (\overline{2}{,}6739) = 1{,}1109$$

Debiendo tenerse presente que sólo la característica es negativa, luego las mantisas se suman normalmente, y las características se suman con sus respectivos signos. Ahora hay que buscar el número que corresponde al logaritmo hallado 1,1109. Entrando en la tabla con la mantisa 1109, se tiene:

para 1106 el número es 129
por diferencia 3 corresponde cuarta cifra 1
resulta 1291 y como la característica es 1, debe haber dos cifras. Luego

$$12{,}91$$

Es el resultado del producto propuesto.

74. — Logaritmo del cociente

Por definición, el logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia entre los logaritmos de sus números. Por el mismo procedimiento empleado para el producto puede demostrarse que esto es cierto. Tomemos las expresiones exponenciales de dos números:

$$10^a = 80$$
$$10^b = 120$$

De donde según sabemos 80 y 120 son los números, *a* y *b* sus logaritmos. Hagamos el cociente de las dos expresiones:

$$\frac{10^a}{10^b} = \frac{80}{120}$$

Y aplicando la propiedad de los exponentes:

$$10^{a-b} = \frac{80}{120}$$

Luego, si:

$$\log\ 80 = a$$
$$\log 120 = b$$

Resulta que:

$$\log \frac{80}{120} = a - b$$

Es decir que:

$$\log \frac{80}{120} = \log 80 - \log 120$$

Por simple reemplazo de los equivalentes de las dos letras *a* y *b*.

Ejemplo: Supongamos que se desea calcular por logaritmos el cociente entre 47,56 y 0,032.

Solución:

Previamente se buscan en la tabla los logaritmos de esos dos números:

$$\log 47{,}56 = 1{,}6772$$

Hallado en el renglón del 47, columna del 5 y agregando el adicional a la mantisa;

$$\log 0{,}032 = \overline{2}{,}5051$$

Hallado directamente en la fila del 32 columna del cero.

Ahora hay que restar los dos logaritmos, recordando que se restan las mantisas, luego las características con su signo:

$$1{,}6772 - (\overline{2}{,}5051) = 3{,}1721$$

La característica resultante es 3 puesto que $1 - - 2$ es lo mismo que $1 + 2$ ó sea 3.

Buscando en la tabla el número que corresponde, encontramos que las dos primeras cifras son 14 y la tercera es 8, correspondientes a la mantisa 1703. La diferencia de mantisas es 18, a la cual corresponde en las columnas auxiliares 6 unidades. En definitiva el número tiene las cifras 1486 y la coma debe colocarse con cuatro cifras, puesto que la característica es 3. El resultado del cociente es entonces:

1 4 8 6

75. — Cologaritmo

Por definición, se llama *cologaritmo* de un número al logaritmo de la inversa de dicho número, es decir:

$$\text{colog } 4 = \log \frac{1}{4}$$

Y lógicamente si hacemos operaciones, en el segundo miembro de esa igualdad se tiene:

$$\log \frac{1}{4} = \log 1 - \log 4$$

$$= 0 - \log 4$$

Es decir que el cologaritmo de un número se encuentra restando de cero el logaritmo de ese número. Por ejemplo, el cologaritmo de 162 valdrá:

$$\log 162 = 2{,}2095$$

$$\text{colog } 162 = 0 - 2{,}2095 = \overline{3}{,}7905$$

Que resultó así porque al restar en columna se tenía:

$$\begin{array}{r} 0{,}0000 \\ - \quad 2{,}2095 \\ \hline \overline{3}{,}7905 \end{array}$$

ya que al llegar al primer cero antes de la coma habíamos restado una unidad para hacer la resta y en lugar de ese cero teníamos -1 unidad; luego, menos una unidad, menos dos unidades, resultan menos tres unidades.

Otro ejemplo: determinar el cologaritmo de 0,0395:

$$\log 0{,}0395 = \overline{2}{,}5966$$

$$\text{colog } 0{,}0395 = 0 - \overline{2}{,}5966 = 1{,}4034$$

Que resultó así porque al restar en columna se tenía:

$$\begin{array}{r} 0{,}0000 \\ - \quad \overline{2}{,}5966 \\ \hline 1{,}4034 \end{array}$$

ya que al llegar al primer cero antes de la coma habíamos tomado una unidad para hacer la resta y en lugar de cero teníamos -1 unidad; luego, menos una unidad menos dos unidades negativas es lo mismo que menos una unidad más dos unidades, resultando una unidad positiva que es la característica del resultado.

Con lo visto sobre cologaritmos se presenta una variante para el cálculo de cocientes mediante ellos. En efecto, se tenía que:

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

pero ahora podemos escribir ese cociente así:

$$\frac{A}{B} = A \frac{1}{B}$$

y entonces tendríamos que el logaritmo sale:

$$\log \frac{A}{B} = \log A + \log \frac{1}{B}$$

$$= \log A + \text{colog } B$$

por definición de cologaritmo. Entonces, el logaritmo de un cociente se puede calcular también por la suma del logaritmo del numerador y el cologaritmo del denominador.

76. — Logaritmo de potencias

Cuando se tiene un número elevado a cierta potencia, el logaritmo de esa cantidad es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia. Para demostrarlo, tomemos un número, del cual sabemos que se puede escribir:

$$10^{n} = 20$$

Y elevemos ese número 20 a la potencia 3, por ejemplo: se tiene:

$$(10^a)^3 = 20^3$$

Y por propiedad de los exponentes, podemos deducir:

$$10^{3a} = 20^3$$

Luego, si:

$$\log 20 = a$$

$$\log 20^3 = 3\,a = 3 \log 20$$

Que es precisamente lo que se definió, puesto que el logaritmo del número 20 elevado al cubo es igual a 3 veces el logaritmo de 20. Y lo mismo hubiera resultado con otro número cualquiera que no sea 20.

Ejemplo 1: Si se quiere elevar la cantidad 275 a la potencia 2,5 que es fraccionaria, hay que resolver el problema por logaritmos. Veamos cómo se procede:

Solución

El planteo es:

$$275^{2,5} = ?$$

El primer paso es hallar el logaritmo de 275, o sea del número dado:

$$\log 275 = 2,4393$$

Ahora hay que multiplicar ese logaritmo por 2,5

$$2,4393 \times 2,5 = 6,09825$$

Y ahora se busca el número que corresponde a ese logaritmo. En el renglón del 12, columna del 5 tienen la mantisa

0969

Que le faltan 13,5, unidades para igualar a la que teníamos. Si tomamos prácticamente 14 unidades se tiene la columna auxiliar del 4. Luego el número es 1254; pero como la característica es 6, corresponden 7 cifras.

1.254.000

Es el resultado buscado.

Ejemplo 2: Supongamos para mayor abundamiento, otro ejemplo en el cual se tenga que elevar al cubo el número 0,027.

Solución

El planteo es:

$$0,027^3$$

El logaritmo de 0,027 es:

$$\log 0,027 = \overline{2},4314$$

Multiplicando este logaritmo por 3 se tiene:

$$\overline{2},4314 \times 3 = \overline{5},2942$$

Nótese como detalle muy importante que al multiplicar por 3 y llegar al número 4 que está al lado de la coma se tiene: $3 \times 14 = 12$. Se pone el 2 y se lleva una unidad positiva. Luego $3 \times \overline{2} = \overline{6}$, pero hay una unidad positiva, quedando $\overline{6} + 1 = \overline{5}$, que es lo que se ha hecho.

Buscando en la tabla con la mantisa 2942 encontramos el número 196 provisoriamente. La diferencia de mantisa es de 19, a la que corresponde 8,5 unidades, que agregados al 196 dan:

19685

Pero la coma debe colocarse a los 4 ceros, puesto que la característica es $\overline{5}$. Resulta:

0,000019685

77. — Logaritmos de raíces

Cuando se tiene un número al cual se le extrae una raíz de orden n, el logaritmo de esa raíz es igual al logaritmo del número dividido por el índice n de la raíz. Se puede demostrar esto aplicando el mismo criterio visto para el producto. Tomemos un número y escribamos para él la ecuación exponencial:

$$10^a = 20$$

Y extraigamos la raíz n del número 20:

$$\sqrt[n]{10^a} = \sqrt[n]{20}$$

Y aplicando la propiedad de los exponentes:

$$10^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{20}$$

Luego como:

$$\log 20 = a$$

Resulta que:

$$\log \sqrt[n]{20} = \frac{a}{n} = \frac{\log 20}{n}$$

Es decir, que basta dividir el logaritmo de la subradical por el índice de raíz para tener el logaritmo de toda la raíz.

Ejemplo: Sea el caso de extraer la raíz cúbica de 854,3.

Solución

El planteo es:

$$\sqrt[3]{854,3} = ?$$

Buscamos primeramente el logaritmo de la subradical

$$\log 854,3 = 2,9317$$

En la forma ya conocida. Ahora se lo divide por 3, que es el índice de la raíz.

$$\frac{2,9317}{3} = 0,9772$$

Y ahora buscamos el número que corresponde a este logaritmo. Tenemos para la mantisa 9768 el número 948. La diferencia 4 de la cuarta cifra es 8. Luego tenemos 9488. Como corresponde una cifra, se tiene:

$$9,488$$

Como resultado de la raíz propuesta.

Ejemplo 2: Sea el caso de hallar la raíz cuarta del número 0,00375.

El planteo es:

$$\sqrt[4]{0,00375} = ?$$

Previamente debemos buscar el logaritmo de la cantidad subradical

$$\log 0,00375 = \overline{3},5740$$

En la forma ya conocida. Ahora debe dividirse este logaritmo por el índice de la raíz, que es 4, pero hay que hacer una salvedad importante:

Cuando se debe dividir una característica negativa por un número, no se puede tomar para esa división la primera cifra de la mantisa, ya que debe recordarse que ésta es siempre positiva. El artificio consiste en agregar unidades a la característica hasta hacerla divisible, para lo cual se suman y restan igual número de unidades.

Por ejemplo, para que $\overline{3}$ sea divisible por 4 hay que agregar una unidad negativa; luego para que no altere el logaritmo, se debe compensar agregando una unidad positiva. Lo dicho puede escribirse:

$$\frac{\overline{3},5740}{4} = \frac{\overline{3} - 1 + 1 + 0,5740}{4}$$

$$\frac{\overline{4} + 1,5740}{4} = \frac{\overline{4}}{4} + \frac{1,5740}{4}$$

$$\overline{1} + 0,3935 = \overline{1},3935$$

Es evidente que si se hubiera tenido una característica negativa divisible por el índice de la raíz no hubiera hecho falta el artificio.

Ahora hay que buscar el número que corresponde a ese logaritmo. El 247 tiene por mantisa 3927 con diferencia de 8 a la cual corresponde 4,5 unidades. Luego se tiene 24745, pero como la característica es 1 el número es:

$$0,24745$$

Ejemplo 3: Para fijar ideas daremos otro ejemplo de raíces, puesto que es conveniente observar bien el artificio que se presenta con las características negativas. Sea obtener la raíz cúbica de 0,27.

Solución

El planteo es:

$$\sqrt[3]{0,27} = ?$$

Previamente hallamos el logaritmo de la subradical:

$$\log 0,27 = \overline{1},4314$$

Ahora dividimos ese logaritmo por 3, para lo cual vemos que hay que sumar y restar 2 unidades:

$$\frac{\overline{1},4314}{3} = \frac{\overline{1} - 2 + 2 + 0,4314}{3} =$$

$$= \frac{\overline{3} + 2,4314}{3}$$

$$\frac{\overline{3}}{3} + \frac{2,4314}{3} = \overline{1} + 0,8104 = \overline{1},8104$$

Buscando el número correspondiente se tiene:

646 cuya mantisa es 8102. Por diferencia 2 se tienen 3 unidades; luego el número es 6463. Como la característica es 1, el resultado es:

$$0,6463$$

Día 9

Así como las operaciones con logaritmos podían considerarse como pertenecientes a la Aritmética superior, pese a que no presentan dificultades si se han comprendido las explicaciones dadas en el capítulo precedente, así el tema de la presente jornada puede ser encuadrado dentro de una Geometría superior; es similar en su aspecto gráfico a lo que hemos estudiado antes pero presenta nuevas posibilidades, hay nuevas operaciones y cálculos, en fin es un tema nuevo de vastísima aplicación en la técnica. En todos los libros técnicos encontraremos fórmulas que usan de la Trigonometría, y ésto es lo que estudiaremos ahora. Esta palabra significa estudio o medida de la figura de tres ángulos, es decir del triángulo. Veremos las relaciones fundamentales y las tablas de los valores que aparecen en ellas; veremos también numerosos ejemplos para adquirir práctica suficiente para interpretar cualquier caso que se nos presente en las materias técnicas a cuya comprensión se ha dedicado esta obra.

Debemos aclarar que haremos un estudio sintético de la Trigonometría, tratando únicamente los temas necesarios para cumplir con nuestro objetivo. No perseguimos el análisis exhaustivo de las Matemáticas, como ya lo hemos dicho, sino aprender a usarla como una herramienta de trabajo. Si el lector observa otro libro que trate el tema encontrará asuntos que no aparecen aquí; debe interpretar que los mismos han sido dejados de lado intencionalmente.

ESTUDIOS DE TRIGONOMETRIA

En el capítulo 6 hemos hablado ya del triángulo, pero de él aprendimos a calcular la superficie que encierra como figura cerrada; en el capítulo 6, secciones 56, 57 y 58, volvimos a ocuparnos de él, ya entrando en una serie de consideraciones sobre igualdad y semejanza, además de algunas propiedades particulares. Ahora nos ocuparemos del cálculo de sus elementos, lados y ángulos y de las relaciones que hay entre ellos. Es que el triángulo es una figura que tiene una gran importancia en la técnica por aparecer en numerosas demostraciones y planteos, de modo que las Matemáticas deben estudiarlo en la forma lo más completa posible.

Recordemos que el triángulo tenía tres lados y tres ángulos; los lados se miden como una longitud, en la unidad correspondiente. Los ángulos pueden medirse según los sistemas sexagesimal y circular; de ellos usaremos en este caso el primero, en el cual los ángulos se miden en grados, minutos y segundos (sección 53). Para el estudio de las vinculaciones matemáticas entre las medidas de los lados y de los ángulos, tenemos que explicar antes algunas relaciones muy interesantes que se cumplen para ciertas medidas de rectas vinculadas a los ángulos, tema que se llama *funciones circulares*; debemos considerar este tema como una introducción al estudio de la Trigonometría.

78. — Funciones circulares

Tracemos un ángulo cualquiera en un círculo, como el formado por las letras OA y OM en la Fig. 42. Llamémosle α, usando la primera letra del alfabeto griego. El círculo tiene un radio R, indicado en la figura. Tracemos también algunas rectas características como las dos tangentes al círculo en los puntos A y B, que son las rectas AT y BS. Prolonguemos el radio OM hasta S. Bajemos la perpendicular desde M hasta el radio OA, llegando al punto N. Veamos las relaciones que hay entre esas rectas.

Se llama *seno* de un ángulo a la relación que hay entre la perpendicular MN y el radio, abreviándose así:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MN}{OM}$$

Pudiéndose poner en lugar de OM cualquier otro radio, pues son todos iguales. Como

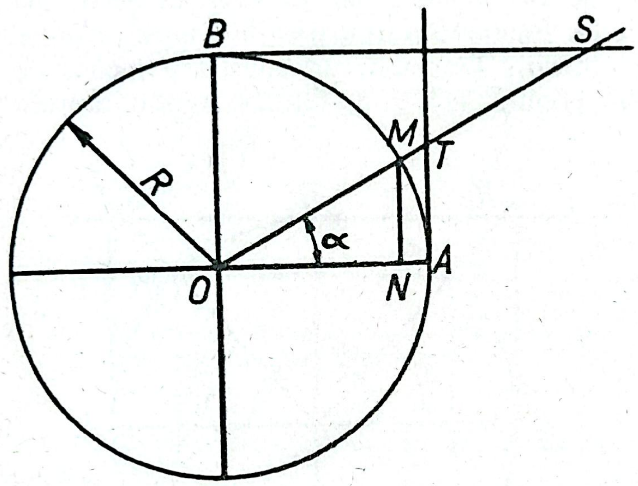


FIG. 42. — Gráfico básico para la consideración de las funciones circulares.

el máximo valor que puede tener MN es el valor OB, igual al radio, se ve que el seno puede valer, como máximo, la unidad (uno), que sucede cuando el punto M está en B, es decir, cuando el ángulo es recto, o sea que vale 90°.

Se llama *coseno* de un ángulo a la relación entre el segmento ON y el radio, escribiéndose así:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM}$$

Y como el máximo valor que puede tomar el segmento ON es el radio OA, también se puede decir que el máximo valor del coseno es la unidad, que sucede cuando la recta OM coincide con la OA, es decir, cuando el ángulo vale cero grados.

Se llama *tangente* de un ángulo a la relación entre el segmento de la tangente geométrica AT y el radio, escribiéndose:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA}$$

Pero ahora no podemos limitar el valor de la tangente, pues a medida que el ángulo va siendo mayor el punto T se va alejando del A, hasta el infinito. Sabemos que el mínimo valor de la tangente, que sucede para un ángulo nulo, es cero, pero el máximo, dado para un ángulo de 90°, no tiene límite, pues es infinitamente grande.

Se llama *cotangente* de un ángulo a la relación entre el segmento BS de la tangente geométrica y el radio OB, escribiéndose:

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{BS}{OB}$$

Pudiéndose decir, lo mismo que para la tangente, que si bien el valor mínimo es nulo, lo que sucede cuando el ángulo α vale 90°, el valor máximo, que es cuando el ángulo vale cero grados, es infinitamente grande, pues el punto S se habrá alejado indefinidamente del B.

En estudios completos de Trigonometría se definen también otras dos relaciones, llamadas *secante* y *cosecante*. La primera es la inversa del coseno y la segunda la inversa del seno; en los cálculos relativos al triángulo no se necesitan y si aparecen en alguna expresión técnica, le bastará al lector recordar las dos relaciones mencionadas:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}$$

79. — Relaciones entre funciones circulares

Supongamos un ángulo cualquiera α (figura 43) y marquemos su complemento que es

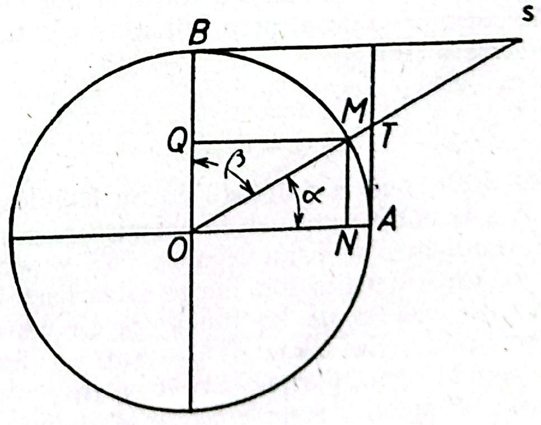


FIG. 43. — Gráfico para demostrar las relaciones entre funciones circulares de ángulos complementarios.

el ángulo β, que sumado al anterior forman 90°. Veamos qué relaciones hay entre las funciones circulares de ambos ángulos, o sea en-

tre un ángulo de 60° y otro de 30°, uno de 20° y uno de 70° y en general, entre dos ángulos cuya suma da 90°, o sea un ángulo recto. Tales ángulos se llaman *complementarios.*

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MN}{OM}$$

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM}$$

Y las mismas funciones del ángulo β, considerando al círculo visto desde su costado izquierdo, como si el radio OB fuera horizontal, son:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{MQ}{OM}$$

$$\cos \beta = \frac{OQ}{OM}$$

Pero observemos que el segmento ON es igual al MQ, por construcción de la figura y que el MN es igual al OQ, con lo que resulta evidente que:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta$$
$$\cos \alpha = \text{sen}\ \beta$$

Que sale de la sustitución de los segmentos iguales en las relaciones dadas. Quiere decir que dados dos ángulos complementarios, o sea cuya suma sea 90°, el seno de uno es igual al coseno del otro y viceversa.

Veamos qué pasa con las tangentes y cotangentes. La relación entre el segmento AT y el radio OA es la tangente del ángulo α, pero se ve en la figura que es también la cotangente del β. Además, BS dividido por OB es la cotangente de α, pero es también la tangente de β. Luego:

$$\text{tg}\ \alpha = \text{ctg}\ \beta$$
$$\text{ctg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$$

Es decir, que la tangente de un ángulo es igual a la cotangente del complemento, o sea del resto angular para llegar a 90° y viceversa. Estos detalles son importantes para las tablas de valores de las funciones circulares, pues basta darlas hasta 45°, o sea la mitad del ángulo recto, porque para los otros 45° se toman los ángulos complementarios, usando el coseno y la cotangente en lugar del seno y tangente.

Las relaciones anteriores pueden escribirse de otra manera si llamados al ángulo β, complementario del α.

$$\beta = 90 - \alpha$$

Queriendo indicarse que beta vale 90 grados menos alfa grados; se tendrá, entonces:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos (90 - \alpha)$$
$$\cos \alpha = \text{sen}\ (90 - \alpha)$$
$$\text{tg}\ \alpha = \text{ctg}\ (90 - \alpha)$$
$$\text{ctg}\ \alpha = \text{tg}\ (90 - \alpha)$$

Veamos las relaciones entre ángulos menores de 90° y entre los mayores, es decir, entre las funciones circulares de ángulos agudos y obtusos. Tracemos un ángulo α menor de 90° (figura 44) y el mismo ángulo tomado

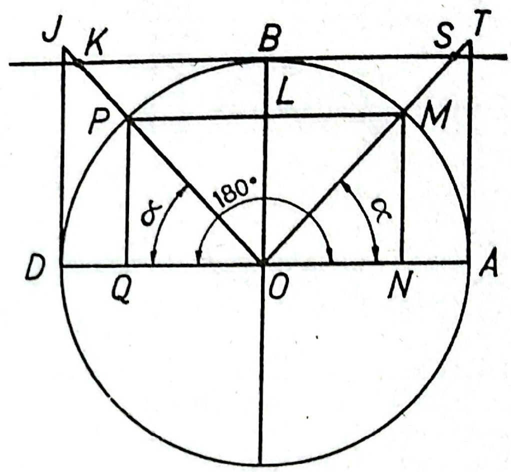


FIG. 44. – Gráfico para demostrar las relaciones entre funciones circulares de ángulos suplementarios.

desde el radio OD. Tendremos dos ángulos iguales; pero si consideramos el ángulo formado por la recta OP con el radio OA, tendremos un ángulo obtuso que sumado al α comprendido entre OA y OM, o lo que es lo mismo, al formado por OD y OP, dan 180°, o sea medio círculo. Dos ángulos tales que sumados dan 180° se dice que son *suplementarios.*

Las relaciones entre las funciones circulares de ambos ángulos se deducen de la figura, pues el punto P es simétrico del M; el K es simétrico del S y el J del T. Luego tendremos:

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (180 - \alpha)$$
$$\cos \alpha = -\cos (180 - \alpha)$$
$$\text{tg}\ \alpha = -\text{tg}\ (180 - \alpha)$$
$$\text{ctg}\ \alpha = -\text{ctg}\ (180 - \alpha)$$

Donde los signos negativos se deben a que se considera positivo el sentido que parte del radio OA hacia arriba y del OB hacia la derecha. Luego, la única función positiva en el segundo cuadrante es el seno, pues para la tangente se considera la prolongación del radio

OP que cortaría a la recta AT en un punto hacia abajo del radio OA.

Veamos las funciones circulares de ángulos obtusos mayores de 180°, o sea que caen en el tercer cuadrante (figura 45). Sea un ángu-

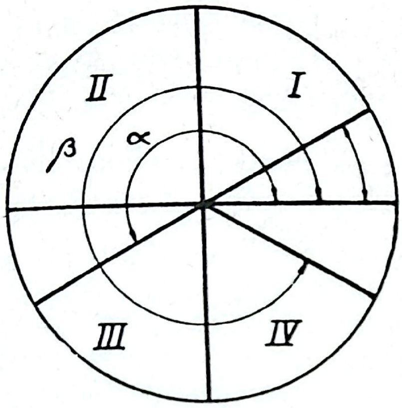


Fig. 45. — Indicación de los cuatro cuadrantes para considerar las funciones circulares.

lo tal como el α. Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} (\alpha - 180)$$
$$\cos \alpha = -\cos (\alpha - 180)$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha - 180)$$
$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha - 180)$$

Para ángulos mayores de 270°, o sea los que caen en el cuarto cuadrante, como el β de la figura 45, se tiene:

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} (360 - \beta)$$
$$\cos \beta = \cos (360 - \beta)$$
$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} (360 - \beta)$$
$$\operatorname{ctg} \beta = -\operatorname{ctg} (360 - \beta)$$

Con cuyas relaciones se ve que basta conocer los valores de las funciones circulares para ángulos entre cero y 45° para poder calcular las de los ángulos restantes. Midiendo con precisión los segmentos que entran en las relaciones que dan las funciones, se pueden confeccionar las tablas de los valores de cada una de ellas.

Otras relaciones importantes se deducen de la figura 43 y son:

$$\frac{TA}{OA} = \frac{MN}{ON}$$

pero $OA = 1$ y los segmentos restantes son conocidos; luego:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

y por idéntico procedimiento podemos encontrar que:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

expresiones ambas que tienen aplicaciones importantes.

Tablas de funciones circulares

De acuerdo con las consideraciones precedentes pueden confeccionarse tablas que dan los valores de las funciones circulares para cada valor del ángulo. Tales tablas suelen contener únicamente el seno, coseno, tangente y cotangente, puesto que la secante es la inversa del coseno y la cosecante lo es del seno. Inclusive, desde que la tangente y la cotangente se hallan por cociente entre el seno y el coseno, las tablas podrían tener únicamente estas dos últimas funciones y con ellas se calculan fácilmente los valores de las otras cuatro.

Las tablas mencionadas se encuentran en los manuales técnicos, pero desde la aparición de las calculadoras electrónicas (ver capítulo 10), las que dan por lectura directa los valores de las funciones circulares, carece de finalidad práctica disponer de las mismas. En los ejemplos que siguen y se mencionan tales valores se supondrá que el lector dispone de las tablas o de la calculadora.

80. — **Trigonometría**

Aplicaremos al triángulo rectángulo los conceptos sobre funciones circulares vistos recientemente. Sea un triángulo OMN (figura

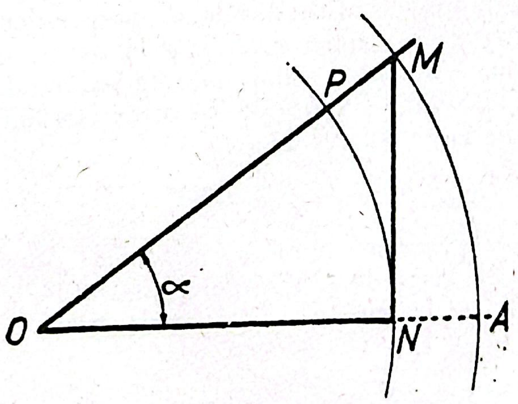


Fig. 46. — Aplicación de las funciones circulares a la Trigonometría.

46) y tracemos los círculos con centro en O y con radios ON y OA. Se ve enseguida que se pueden aplicar a esta figura las considera-

ciones hechas en la número 42, de modo que se puede escribir:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MN}{OM}$$

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM}$$

Para el círculo de radio *OM*. Para el otro de radio *OP* se puede escribir:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{MN}{ON}$$

Tracemos un triángulo sin el auxilio de los círculos y asignemos letras a sus lados y sus ángulos. Como nos referiremos al triángulo rectángulo, uno de sus ángulos debe valer 90°, por definición de este tipo de triángulos (figura 47).

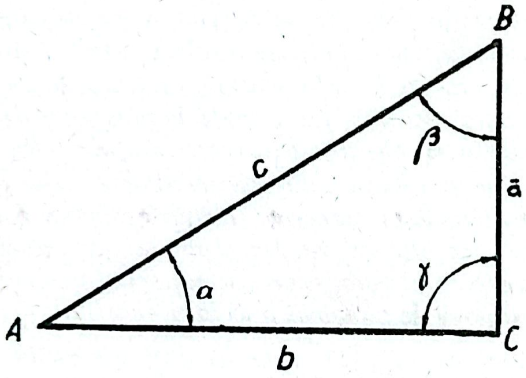


FIG. 47. — Indicación de lados y ángulos en un triángulo rectángulo.

Los vértices se designan con letras mayúsculas, los lados con minúsculas y los ángulos con letras griegas. Los dos lados perpendiculares entre sí se llaman *catetos* y el otro lado se llama *hipotenusa*. Como uno de los ángulos, el α, vale 90°, la suma de los otros dos también debe valer 90°, es decir:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Apliquemos ahora las relaciones obtenidas en el triángulo *OMN* de la figura 46, a este caso, y se tiene:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}$$

Que es el teorema del seno, que dice que el seno de un ángulo es igual al cociente entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Que es el teorema del coseno, que dice que el coseno de un ángulo es igual al cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$$

O sea la relación entre el cateto opuesto a un ángulo y el cateto adyacente da la tangente de ese ángulo. Este es el teorema de la tangente.

De acuerdo con las relaciones entre ángulos que sumados dan 90° se puede escribir, para el mismo triángulo:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{ctg}\ \beta = \frac{a}{b}$$

Con cuyo juego de fórmulas se puede calcular cualquier lado del triángulo conociendo otro lado y un ángulo, o calcular un ángulo conociendo dos lados, o un solo lado y el ángulo, etc.

81. — Teorema de Pitágoras

Veamos ahora una interesante aplicación de las consideraciones anteriores de vasta aplicación en la Técnica. Se trata del *teorema de Pitágoras*, que es válido para los triángulos rectángulos. Escribamos las relaciones que dan el seno y el coseno de uno de los ángulos, por ejemplo, el α:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Y elevemos al cuadrado las dos expresiones anteriores, sumándolas entre sí:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

Que no presenta particularidad evidente, pero si calculamos el cuadrado del seno y del coseno para cualquier ángulo de la tabla, y los

sumamos, veremos que dan uno, por lo que la fórmula anterior queda reducida a:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Que permite aplicar conocimientos del Algebra para despejar la cantidad c^2, resultando:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Siendo ésta la expresión del teorema de Pitágoras, que dice que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. (Para la demostración, ver también Sección 84.) Es evidente que tiene una gran importancia, pues permite calcular cualquier lado del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, sin que se sepa el valor de ningún ángulo.

82. — Resolución de triángulos rectángulos

Aplicaremos los conocimientos ya vistos, a casos prácticos de resolución de triángulos rectángulos que son los que tienen inmediata aplicación de la Técnica. Se sobreentiende que resolver un triángulo es calcular todos sus lados y sus ángulos, conocidos solamente dos elementos.

Es natural que no basta conocer solamente dos ángulos, puesto que debe conocerse por lo menos un lado. Para justificarlo observemos la figura 48 que muestra una serie de

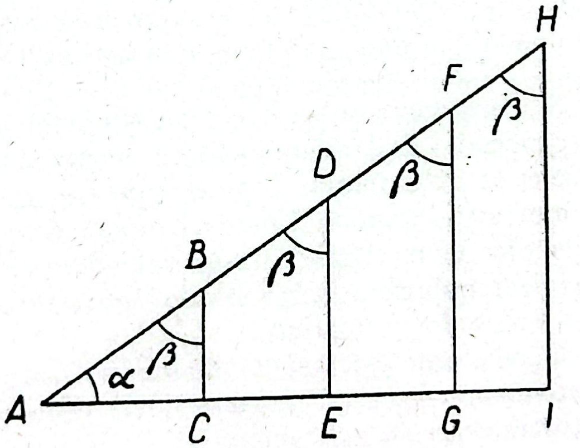


FIG. 48. — Triángulos rectángulos de diferentes dimensiones, pero de ángulos iguales.

triángulos rectángulos, que tienen iguales sus ángulos y distintos sus lados. Si se conocen los valores de α y β no pueden calcularse las dimensiones de ninguno de los lados, puesto que el triángulo *ABC*, el *ADE*, *AFG*, etc. tienen idénticos sus tres ángulos y completamente diferentes sus lados.

Por ello, para resolver un triángulo deben conocerse: dos lados o un lado y un ángulo, este último que no sea el recto, que es tácitamente siempre conocido.

En tres ejemplos clásicos se pueden resumir la mayor parte de los casos que se presentan en la práctica. Mostraremos cómo se resuelven tales casos típicos con referencia a la figura 49, en la cual no se indica el ángulo

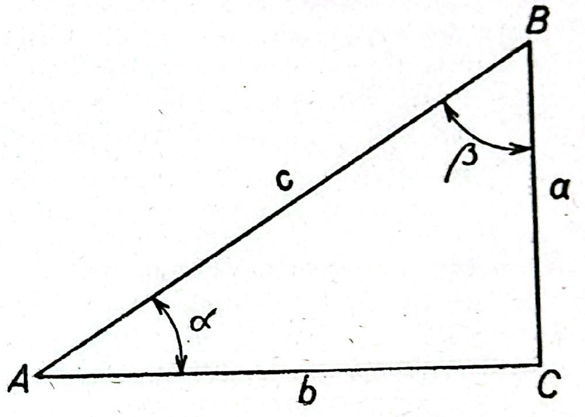


FIG. 49. — Triángulo común, tomado como base para los ejemplos numéricos.

en *C* puesto que damos por conocido que vale siempre 90°.

Ejemplo 1: Resolver un triángulo rectángulo dado el ángulo α de 25° y el cateto *b* de 20 metros.

Solución

Aplicando la expresión de la tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

De la cual se puede deducir el valor de *a*, que es:

$$a = b \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = 20 \times \operatorname{tg} 25°$$

Buscando en la tabla la tg de 25° que vale 0,466, se reemplaza:

$$a = 20 \times 0{,}466 = 9{,}32 \text{ m}$$

Para hallar el valor de la hipotenusa podemos aplicar la expresión del seno o del coseno. Eligiendo esta última se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$c = \frac{20}{\cos 25^\circ}$$

Buscando en la tabla el coseno de 25°, vemos que vale 0,906 y reemplazando:

$$c = \frac{20}{0{,}906} = 22 \text{ m}$$

Resta ahora determinar el valor del ángulo β, que podría hacerse con cualquiera de las fórmulas del seno, coseno o tangente, pero resulta más simple utilizar la propiedad de los triángulos que dice que la suma de sus tres ángulos vale 180°, y como el recto vale 90°, se tiene:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

De donde se deduce el valor de β:

$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\beta = 90 - 25 = 65^\circ$$

Ejemplo 2: Resolver un triángulo rectángulo dados la hipotenusa $c = 30$ m y el ángulo $\alpha = 70^\circ$.

Solución

Como los datos incluyen los componentes de la expresión del coseno aplicamos ésta:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

De donde puede despejarse el valor de *b:*

$$b = c \cos \alpha$$

$$b = 30 \times \cos 70^\circ$$

Buscando en la tabla el cos de 70° vemos que no podemos usar la primera columna de los ángulos, puesto que llega a 45°. Utilizamos entonces la última, con las cabezas inferiores de columnas y encontramos que el cos de 70° vale 0,342. Reemplazándolo en la expresión anterior:

$$b = 30 \times 0{,}342 = 12{,}96$$

El cateto *a* se puede hallar por el teorema de Pitágoras puesto que se conocen los otros dos lados, o por la fórmula del seno:

$$a = c \operatorname{sen} \alpha$$

$$a = 30 \times \operatorname{sen} 70^\circ$$

Buscando en la tabla y entrando por la última columna se tiene que el seno de 70° vale 0,94.

$$a = 30 \times 0{,}94 = 28{,}2 \text{ m}$$

Finalmente el ángulo β, por lo que sabemos, vale:

$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\beta = 90 - 70 = 20^\circ$$

Ejemplo 3: Se trata de resolver un triángulo del cual se conocen dos lados, por ejemplo sus catetos: $a = 40$ m y $b = 60$ m.

Solución

Cuando se conocen los dos lados de un triángulo, hay que buscar la fórmula del sen, cos o tg, que contenga a esos dos lados. En este caso, la de la tg contiene a los lados, por lo cual la aplicaremos de inmediato:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{60} = 0{,}66$$

Con la cual vamos a la tabla entrando por la columna de la tg. Vemos que el ángulo está comprendido entre 33° 20′ y 33° 30′, más próximo a este último, luego:

$$\alpha = 33^\circ\, 30'$$

$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\beta = 90 - 33^\circ\, 30' = 56^\circ\, 30'$$

Se hace notar que existen tablas mucho más complicadas de las funciones circulares, en las cuales se determina el ángulo dado en grados, minutos y segundos. Como el objeto de estos ejemplos es mostrar el mecanismo del cálculo no tiene importancia la falta de rigurosidad en los resultados numéricos.

Falta ahora calcular la hipotenusa, lo que haremos mediante el teorema de Pitágoras para demostrar su aplicación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{40^2 + 60^2}$$

$$c = \sqrt{1600 + 3600}$$

$$c = \sqrt{5200} = 72 \text{ m}$$

Con lo que quedan determinados todos los elementos del triángulo propuesto. El cálculo de la raíz cuadrada pudo hacerse con ayuda de logaritmos o mediante las explicaciones del capítulo 10.

83. — Resolución de triángulos oblicuángulos

La resolución de triángulos rectángulos, es decir el cálculo de todos sus elementos ya está explicada. Veamos ahora el procedimiento a

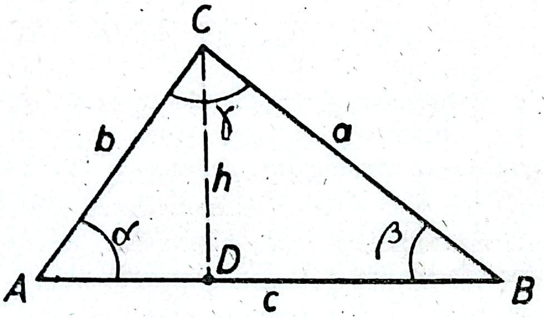


FIG. 50. — Indicación de las medidas en un triángulo oblicuángulo.

seguir para la resolución de los triángulos oblicuángulos, cuyos elementos están denominados en la figura 50. La altura h es una de las tres que pueden trazarse y es perpendicular a uno de los lados, en este caso al c. Si conocemos las dimensiones de los lados y los ángulos, puede calcularse el área del triángulo mediante el cálculo de la altura h, para lo cual consideramos los dos triángulos rectángulos que esa recta h forma: el ACD y el CBD.

Por lo visto para los triángulos rectángulos sabemos que un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto a ese cateto. Para la altura h podemos escribir dos expresiones, según consideremos uno de los triángulos rectángulos o el otro:

$$h = a \operatorname{sen} \beta$$
$$h = b \operatorname{sen} \alpha$$

y evidentemente, igualando los segundos miembros de las ecuaciones anteriores resulta:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$$

lo que quiere decir que en el triángulo oblicuángulo los lados están en la misma relación que los senos de los ángulos opuestos; generalizando para todos los elementos del triángulo se tiene:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Relaciones que nos permiten calcular un elemento conociendo otros tres. Además, de las expresiones superiores que dan el valor de la altura h podemos tomar la que interese para calcular esa altura y entonces el cálculo de la superficie es posible con la fórmula ya vista en el capítulo 5, sección 50:

$$S = \frac{c\,h}{2}$$

donde la base es ahora el lado c del triángulo, por razones de denominación ordenada.

Otra ecuación importante para la resolución de los triángulos oblicuángulos es la que permite determinar la medida de un lado conociendo los otros dos y el ángulo comprendido; esa ecuación también posibilita el cálculo de un ángulo conociendo los tres lados del triángulo y ya vemos que no necesitaremos más para resolver todo el triángulo. En efecto, si conocemos dos lados y un ángulo, calculamos el otro ángulo con las expresiones vistas antes; el tercer ángulo se determina por una simple resta, ya que los tres ángulos del triángulo suman 180°. Luego con esas relaciones entre los lados y los senos de los ángulos opuestos podemos calcular el lado que faltaba. Si conocemos los lados e ignoramos los ángulos, emplearemos la ecuación que ahora vamos a encontrar.

Veamos el triángulo que muestra la figura 51. Hemos trazado otra altura h distinta que

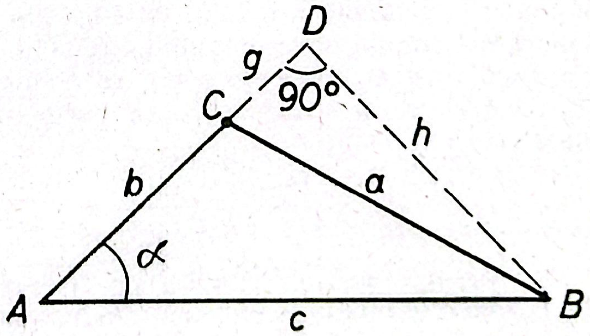


FIG. 51. — Indicación de medidas para deducir el valor de uno de los lados.

la de la figura anterior, la cual nos marca un segmento g comprendido entre los puntos C y D. El ángulo en D es recto, con lo que

tenemos dos triángulos rectángulos en los cuales b es un cateto. Escribamos el teorema de Pitágoras para esos dos triángulos, el *ADB* y el *CDB*:

$$b^2 = a^2 - g^2$$
$$b^2 = c^2 - (b + g)^2$$

Igualemos ahora las dos expresiones, tomando sus segundos miembros:

$$a^2 - g^2 = c^2 - (b + g)^2$$

Y pongamos, por conveniencia de la deducción, en lugar de g del primer miembro, la medida $(b + g - b)$; con eso tenemos:

$$a^2 - (b + g - b)^2 = c^2 - (b + g)^2$$

Y ahora podemos ver que la cantidad $(b + g)$ no es otra cosa que:

$$b + g = c \cos \alpha$$

tal como se deduce de la figura 49 en el triángulo rectángulo *ADB*; reemplazando, se tiene:

$$a^2 - (c \cos \alpha - b)^2 = c^2 - (c \cos \alpha)^2$$

Desarrollaremos el cuadrado del binomio (sección 36), del primer miembro y obtenemos:

$$a^2 - (c^2 \cos^2 \alpha + b^2 - 2\, b\, c \cos \alpha) =$$
$$= c^2 - (c \cos \alpha)^2$$

Hay dos términos en $- c^2 \cos^2 \alpha$; luego se eliminan y nos queda, ordenando y cuidando los signos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos \alpha$$

Es decir que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. Si ese ángulo es desconocido, pero se conocen las medidas de los tres lados, se puede deducir:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, b\, c}$$

Que permite deducir el valor de cualquier ángulo del triángulo, cuidando que el lado que aparece con el signo negativo en el numerador y que no aparece en el denominador sea el opuesto al ángulo cuyo coseno se calcula. Con lo visto, consideramos resuelto cualquier triángulo oblicuángulo.

Hay todavía una expresión muy interesante que se refiere a los triángulos oblicuángulos, y es la *fórmula de Herón;* la misma da la superficie sin conocer ninguno de los ángulos ni las alturas, simplemente conociendo las longitudes de los lados. Veamos esa fórmula:

En primer lugar definiremos el semiperímetro, dado como la mitad de la suma de las longitudes de los lados del triángulo. Se le asigna la letra p y su valor es:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Luego, conocido ese valor, la superficie encerrada por los tres lados del triángulo vale:

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

cuya deducción no hacemos para no salirnos de los objetivos de este libro. Ejemplo: Si tenemos un triángulo cuyos lados miden: $a = 40$ m; $b = 20$ m y $c = 30$ m, la superficie se puede calcular con la fórmula de Herón. Hallemos primero el semiperímetro:

$$p = \frac{40 + 20 + 30}{2} = 45$$

luego la superficie:

$$S = \sqrt{45 \times 5 \times 25 \times 15}$$

$$= \sqrt{84375} = 290 \text{ m}^2$$

84. — Otras expresiones de interés

Además de las relaciones entre funciones circulares que hemos visto hay muchas otras de frecuente aplicación en la técnica; no es nuestro objetivo el desarrollar un curso completo sobre Trigonometría, pero hemos considerado de interés exponer tales expresiones para facilitar al lector la lectura de libros técnicos en los cuales aparecen las mismas.

Veamos por ejemplo las relaciones entre algunas funciones de un mismo ángulo. Retomemos la figura 42 y tomemos de ella el triángulo *OMN*. De acuerdo con el teorema de Pitágoras podemos escribir:

$$\overline{MN}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OM}^2$$

y si dividimos a toda la expresión por la cantidad que aparece en el segundo miembro, resulta:

$$\left(\frac{MN}{OM}\right)^2 + \left(\frac{ON}{OM}\right)^2 = 1$$

Ahora analicemos el significado de los parén-

tesis. El primero es el seno y el segundo el coseno del ángulo α. Luego, podemos escribir:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Como segunda aplicación importante tomemos en la figura 43 los dos triángulos OMN y OTA. Por semejanza, puede escribirse la proporcionalidad:

$$\frac{MN}{ON} = \frac{AT}{OA}$$

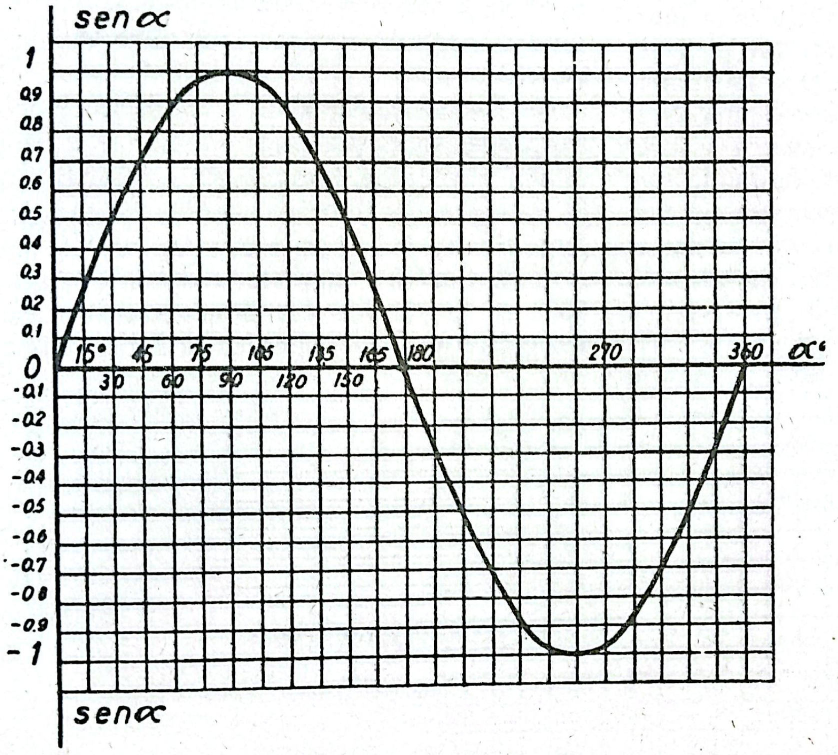


Fig. 52. — Representación gráfica de la función circular seno.

Y nada impide que dividamos por OM a las dos cantidades que aparecen en el primer miembro de esa relación, y se tiene:

$$\frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{ON}{OM}} = \frac{AT}{OA}$$

Y ahora veamos lo que representa cada quebrado en la expresión anterior. El segundo miembro es, evidentemente, la tangente y el primer miembro el cociente entre el seno v el coseno, todas funciones del ángulo α. Luego, podemos escribir:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Y siguiendo un procedimiento similar en la deducción obtendríamos:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Pueden deducirse muchas otras expresiones relacionadas con funciones circulares, pero de todas ellas las que encontraremos en los libros técnicos son las referentes a los ángulos dobles y a la suma de ángulos, las que escribiremos directamente sin deducirlas, para que sirvan al lector en el uso y no como ejercitación de deducción de fórmulas.

Veamos primero las funciones de ángulos dobles referidas a las de los ángulos básicos:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Y ahora escribamos las expresiones correspondientes a las funciones de la suma de dos ángulos en función de las funciones de los ángulos dados:

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

85. — Representación gráfica de funciones circulares

Recordemos lo que vimos en el capítulo 6, sección 59, acerca de representaciones gráficas y comencemos a usar ese tema para mostrar en un dibujo las variaciones que presenta una cantidad que varía según una ley conocida. Las funciones circulares que hemos estudiado en el presente capítulo tienen valores determinados para cada ángulo, de modo que si tomamos un par de ejes coordenados o cartesianos y volcamos en ellos los valores de los ángulos y de las funciones *seno*, *coseno*, etc., obtendremos la representación gráfica de estas últimas.

Es común tomar los ángulos en el eje de abscisas, para lo cual se toman sobre el mismo los 360° del círculo completo, tal como se ve en la figura 52. Claro está que de acuerdo con el tamaño del gráfico, marcaremos los grados de 15 en 15 para poder leer las divisiones. En el eje de ordenadas marcamos los valores que corresponden al seno, tomados de la tabla, entre 0° y 45°. Para los valores entre 45° y 90° se toma la tabla entrando desde abajo, como se ha hecho para resolver los ejemplos. Y para los ángulos mayores de 90° y hasta 360°, se deben tener en cuenta las relaciones que hemos visto acerca de los valores que toma el seno en cada cuadrante (figuras 44 y 45). Con todo eso trazamos los valores en el gráfico de la figura 52 y tenemos representado el seno de un ángulo.

La curva obtenida uniendo con una línea continua las ordenadas para cada valor, se llama *senoide*. La particularidad es que esa curva acusa valor igual a cero para los ángulos de 0°, 180° y 360°; acusa valor igual a la unidad, o sea uno, para ángulo de 90° y la unidad negativa o sea —1 para el ángulo de 270°.

En forma similar al procedimiento empleado para el seno, podemos obtener la representación gráfica del *coseno*, y veremos la curva de la figura 53. Es otra senoide que presenta la particularidad, si se la compara con la anterior, de que está desplazada de un ángulo de 90°; en la técnica ese desplazamiento entre los gráficos de las senoides se llama *defasaje*.

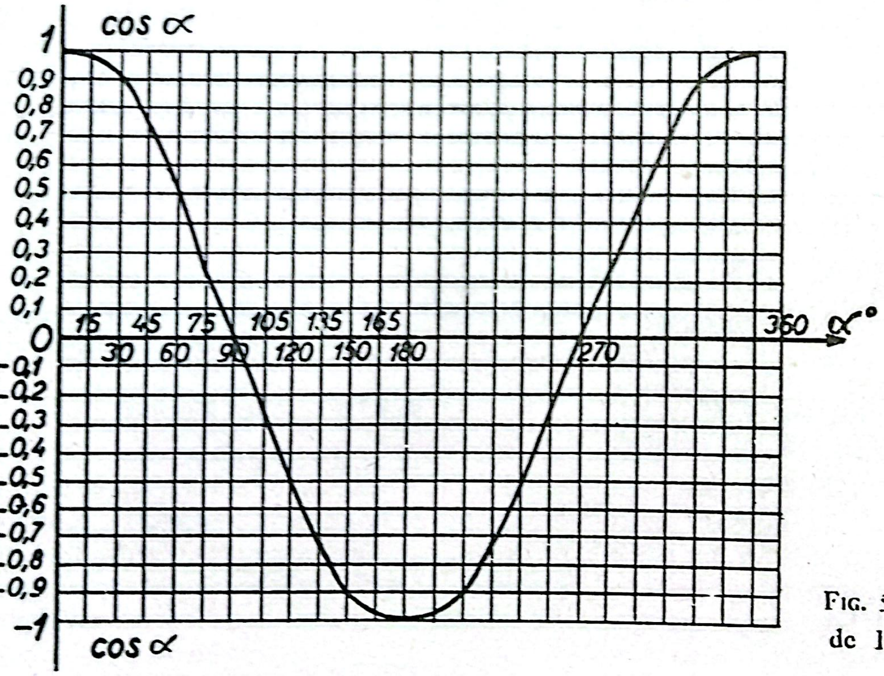


FIG. 53. — Representación gráfica de la función circular coseno.

También en el caso del coseno los valores positivos los tomamos hacia arriba del eje y los negativos hacia abajo.

Se podría representar las otras funciones circulares, la tangente, cotangente, secante y cosecante, pero no tienen en la práctica tanta importancia como las senoides, las cuales en la Electrotecnia se emplean constantemente. De todos modos, el lector que quiera intentarlo, no tiene más que seguir el procedimiento indicado y obtendrá los gráficos respectivos.

Día 10

En las cuatro ediciones anteriores de este libro dedicábamos la presente jornada a explicar el manejo de la regla de cálculos, ya que la misma puede ser considerada una máquina de calcular portátil, es decir que se lleva consigo al lugar de trabajo. Además las máquinas calculadoras de escritorio, sean manuales o eléctricas, en épocas pasadas no realizaban todas las operaciones matemáticas, como son la extracción de raíces, la obtención de líneas trigonométricas, logaritmos, etc. Pero la última década se caracteriza por los adelantos tecnológicos que surgen en un febril desfile dejando de lado infinidad de interesantes dispositivos que sirvieron durante un siglo o algo menos. Caso típico de esta revolución son las calculadoras electrónicas con las que, aun con los modelos de bolsillo, se pueden realizar todas las operaciones matemáticas. Este logro maravilloso de la tecnología electrónica hizo archivar las tablas de logaritmos y trigonométricas y las reglas de cálculo.

Así las cosas, decidimos incorporar en esta edición la explicación del manejo de las minicalculadoras, suprimiendo el tratamiento de las reglas de calcular. Pero debimos respetar la limitación de posibilidades ya que no se podía, en un libro de matemáticas, hablar de electrónica sino únicamente del tema básico. Por otra parte los usuarios de las calculadoras no necesitan saber qué es lo que tienen adentro sino usarlas y cuando ocurre un desperfecto llevarlas al taller de reparaciones. Planteado el tema y sus limitaciones, abordemos la tarea.

CALCULADORAS ELECTRONICAS

Pretender explicar el funcionamiento de una máquina de calcular, sea del tipo mecánico, eléctrico o electrónico sería lo mismo que pretender que el usuario de un automóvil conozca la teoría del motor a explosión o que el ama de casa sepa algo de termodinámica como para saber cómo funciona su heladera. Existen libros que explican esas cosas y cualquiera puede intentar estudiar el tema, pero para usar una calculadora lo único que se necesita es aprender a manejarla. Cuando se adquiere una de estas maquinitas entregan un folleto explicativo con ejemplos de todas las operaciones que cada modelo de máquina permite realizar y después de leerlo y probar de hacer cada uno de los casos presentados como ejemplo, el usuario llega a dominar el manejo de su valioso auxiliar.

La exposición precedente nos impulsó a encarar una tarea de orientación destinada al lector que desea adquirir una máquina, la cual deberá cubrir sus necesidades. No es muy conveniente que para realizar siempre operaciones simples se disponga de un modelo de los llamados científicos porque aumentaría la probabilidad del tecleado incorrecto. En cambio si se necesitan operaciones matemáticas más complejas, conviene disponer de alguno de los modelos más completos. También mostraremos el uso de una máquina típica con ejemplos clásicos, lo cual ayudará a interpretar los folletos explicativos que son a veces muy sintéticos. Inclusive, hablaremos de los dos tipos básicos de entrada para que el lector pueda elegir entre máquinas de similar aspecto exterior la que más le conviene. Todo esto puede aparecer algo confuso hasta que no entremos en tema pero se aclarará debidamente durante el desarrollo del mismo.

Para los ejemplos hemos elegido máquinas que existen en nuestro mercado, el cual está muy bien surtido. Es imposible mencionar todas las existentes y las que aparecerán, de modo que la elección no implica preferencia sino que tiene un mero carácter circunstancial.

86. – Tipos de calculadoras

Basta observar las vidrieras de los negocios del ramo para comprobar que existe una gran variedad de calculadoras electrónicas y si se quisiera hacer una clasificación habría que adoptar algún criterio. Puede agrupárselas en dos clases atendien-

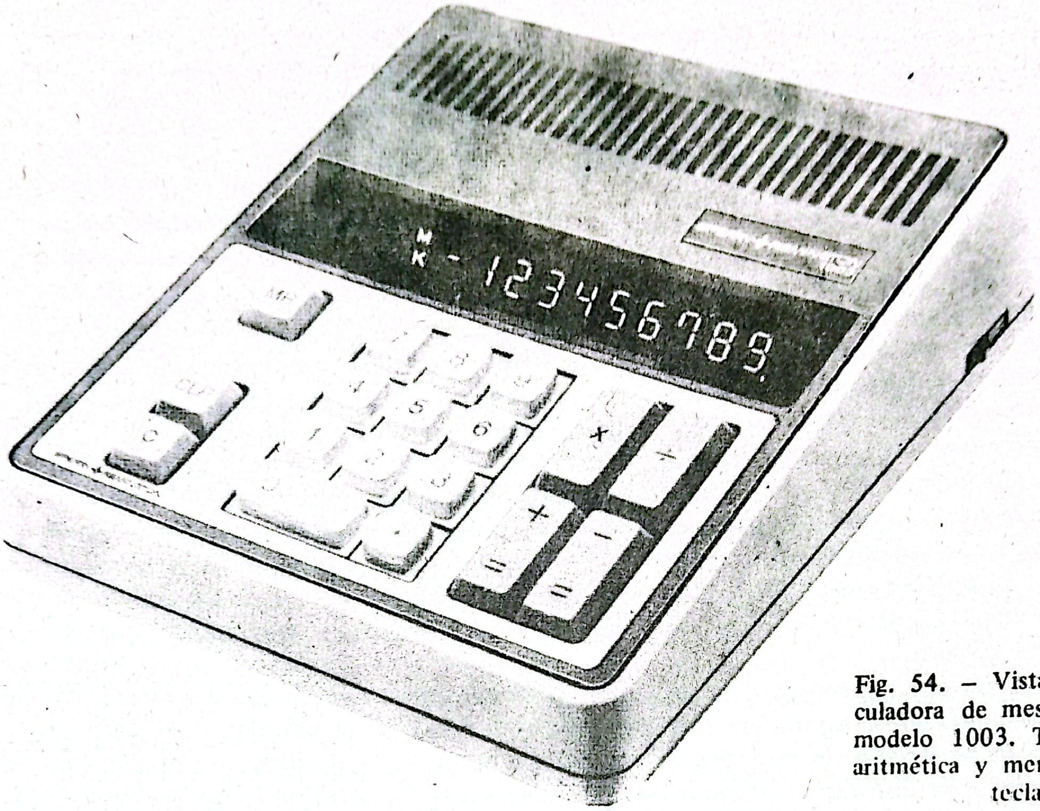


Fig. 54. – Vista de una calculadora de mesa Remington modelo 1003. Tiene entrada aritmética y memoria de una tecla.

do a su tamaño, y tenemos las de escritorio y las de bolsillo. Las de escritorio se alimentan generalmente desde la línea eléctrica y pueden tener o no rollo de papel para imprimir las cifras de la operación. La figura 54 muestra el modelo 1003 de la Remington. Las de bolsillo se alimentan con pilas secas, sean desechables o recargables; últimamente las hay que se recargan con luz solar o eléctrica. La figura 55 muestra un modelo de bolsillo extrachato, la Unitronic 24K con pilas de cadmio que se recargan con una pequeña fuente eléctrica; se la ve en tamaño natural.

Otra clasificación atiende a las posibilidades que brinda y así tenemos las más simples, que realizan las cuatro operaciones aritméticas únicamente y desde este tipo vamos encontrando agregados como raiz cuadrada, porciento, inversión de operación, memoria (esto tiene la de la figura 55) y así siguiendo llegamos a las más sofisticadas que incluyen logaritmos, potencias, raices, líneas trigonométricas, número pi. De alguna de estas máquinas hablaremos más adelante.

Pero una clasificación importante es también la que concierne a la manera de usar el teclado, lo que se llama *sistema de entrada*. Hay dos sistemas en uso y se los llama: 1) de entrada aritmética o sistema polaco (así llamado en honor al matemático Lukasiewicz, de esa nacionalidad, que ideó ese sistema operativo) y 2) de entrada algebraica o de *papel y lápiz*. En las máquinas de entrada aritmética debe teclearse el signo + después de escribir cada sumando, lo mismo que el , mientras que en las de entrada algebraica, ese signo se antepone a la cifra y queda sobreentendido en la primer cifra si es positivo. O sea que, por ejemplo, para hacer la siguiente operación: 2 + + 4 – 3, teclearíamos de la siguiente manera:

máquina aritmética:

2 + 4 – 3 – y leemos el resultado: 3

máquina algebraica:

2 + 4 – 3 = y leemos el resultado: 3

Obsérvese que el tecleo de la primera aparece menos lógico en cuanto a la manera de escribir la operación, razón por la cual se denomina de papel y lápiz a la segunda máquina, que es la que cada vez se encuentra más difundida.

Cabe acotar que la máquina de la figura 54 es de entrada aritmética y la de la figura 55 es algebraica. Hay una manera fácil para identificarlas y es lo que muestra la figura 56. Las teclas de + y – tienen agregado el signo = en las aritméticas, por lo menos en la mayoría, mientras que en las algebraicas hay una tecla = separada que se usa para todas las operaciones cuando se desea un resultado. En la aritmética el resultado parcial de sumas y restas aparece solo, sin buscarlo, y esto no es una ventaja aunque lo parezca, pues en los procesos operativos ofrece ventajas la máquina de entrada algebraica (figura 55).

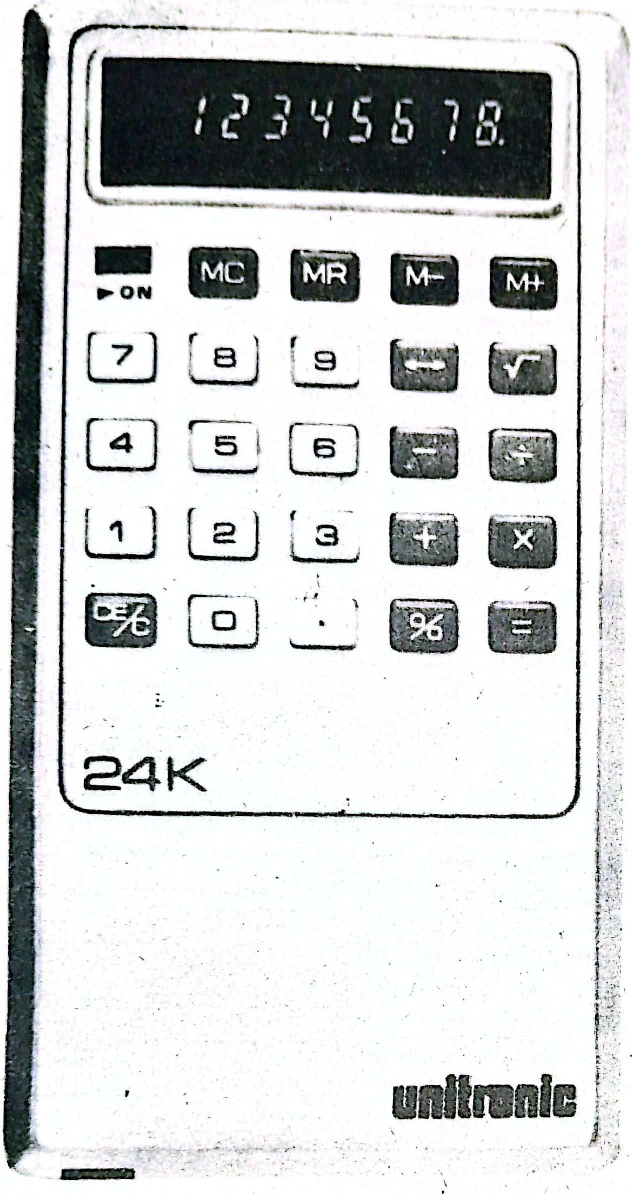


Fig. 55. – Vista de una calculadora electrónica de bolsillo Unitronik modelo 24 K. Es de entrada algebraica y tiene memoria de cuatro teclas, raiz cuadrada y porciento:

87. – Visores luminosos

Las calculadoras electrónicas tienen una pantalla o visor en la que pueden verse las cifras que se teclean o los resultados obtenidos en las operaciones. Esos números no tienen el aspecto común sino que aparecen formados por trazos rectos que se combinan para formar cada número en la forma como se ve en la figura 57, que responde al tipo más generalizado. Cada trazo recto corresponde a un tubito luminoso que enciende al ser excitado por medios eléctricos y el conjunto de tubitos integra un complejo circuito electrónico que responde a lo que se ha dado en llamar técnica digital. Es obvio que este asunto no puede ser tratado en este libro, pero el lector deberá acostumbrarse a leer números del tipo que hemos comentado.

La coloración de los números puede ser verde, roja, azul, gris, etc. y este detalle depende de la substancia que contengan los bulbos luminosos. Hay dos sistemas en uso: uno es el que usa tubos con gases metalizados, con cierta similitud a los tubos de neón tan conocidos, y otro, más moderno, que emplea los llamados cristales líquidos. Para el observador no hay diferencias de importancia pero los segundos se caracterizan por un menor consumo de corriente y eso es importante en las maquinitas portátiles, ya que las pilas duran mayor cantidad de horas.

En la técnica suele denominarse *display* al tubo luminoso que está detrás del visor, y en la publicidad las diferentes fábricas mencionan el tipo de display que tiene cada máquina, dando la coloración y si es gaseoso o cristal líquido.

88. – Memoria o registro

Al realizar operaciones se presenta muchas veces la necesidad de retener una cifra parcial para combinarla con otra, resultados ambos provenientes de operaciones diversas. Calculando manualmente sobre papel, anotamos los resultados parciales para recurrir a ellos cuando los necesitamos. Las calculadoras modernas nos facilitan la labor sin necesidad de hacer anotaciones aparte mediante el sistema de retención de cifras que se registran electrónicamente y que pueden usarse cuando se desea. A este sistema se lo llama **memoria** y es de enorme utilidad en cálculos matemáticos. La máquina de la figura 54 tiene una tecla marcada como *MR* que al ser oprimida registra la cifra que en ese momento está en el visor y que se borra sin eliminar su almacenamiento con la tecla *C* o definitivamente con la tecla *CLR*. La máquina de la figura 55 tiene cuatro teclas para el proceso de memoria, marcadas como *M+*, *M–*, *MR* y *MC*. Las dos primeras son para registrar cifras en la memoria, usando la *M+* cuando son cifras

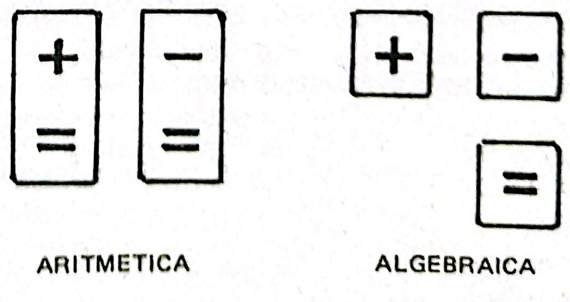


Fig. 56. – Diferenciación en el tecleado entre máquinas con entrada aritmética y algebraica.



Fig. 57. – Aspecto del display luminoso más típico en calculadoras electrónicas.

para acumular positivamente y la *M–* cuando se deben acumular negativamente. Cuando guardamos una cifra para usarla más adelante usamos la tecla *M+*. Para que aparezca en el visor la cifra acumulada o simplemente reservada oprimimos la tecla *MR* y para borrarla oprimimos la *MC*, pero seguida de la tecla de corrección *CE/C*. En los ejemplos operativos veremos la forma de usar las teclas de memoria en sus diversas posibilidades. Cabe acotar que en las máquinas más elaboradas se encuentran varios sistemas de memoria en lugar de uno solo.

89 – Métodos operativos

Si dejamos de lado por el momento las operaciones matemáticas de alto nivel que requieren máquinas de las que hemos denominado científicas, nos quedan como operaciones comunes las seis clásicas de la aritmética: suma, resta, multiplicación, división, potencias y raices. Y si nos conformamos con la raiz cuadrada que es la usada corrientemente, las minicalculadoras comunes pueden servir para realizar todas esas operaciones; todavía podemos agregar el porciento, ya que una gran mayoría de máquinas lo traen y tenemos entonces que la de la figura 55 nos puede servir de modelo para explicar el método operativo.

Queremos hacer una aclaración importante y es que hay diferencias en los métodos de las diferentes máquinas, aún a veces entre las de una misma fábrica, por lo que cada una viene acompañada de un folleto de instrucciones. Por esto es que explicaremos el método operativo para una máquina, la que mencionamos, y si el lector compara estas explicaciones con el folleto de esta misma máquina o de la suya comprobará que las diferencias no son notables y aprenderá con rapidez a manejar cualquier tipo o modelo.

90. – Esquema para suma y resta

Hemos dicho que en las máquinas con entrada algebraica el signo positivo o negativo precede a la cifra y si la primer cifra es positiva no se coloca signo alguno antes de ella, tal como ocurre en el álgebra. En las máquinas de entrada aritmética o polaca el signo se coloca después de la cifra y para el resultado no hay que teclear el signo = sino que lo leemos al marcar el signo + ó – de la última marcación. En las algebraicas, al terminar la serie de sumas o restas hay que teclear el signo =. Este detalle parecería que le otorga simplicidad a las aritméticas pero si se piensa un poco se concluye en que el signo = que debe usarse para todas las operaciones restantes (producto, división, potenciación, radicación, etc.) constituye un símbolo de fin de operación y es útil tener que usarlo también para la suma y resta, con lo que se hace una rutina que evita errores.

En los esquemas operativos que siguen de aquí en más mostraremos en una línea el tecleo sucesivo, o sea la serie de teclas que debemos ir oprimiendo para realizar la operación y en una línea inferior las cifras que iremos viendo en el visor al oprimir cada tecla. De este modo el lector puede seguir el método y aplicarlo sin tropiezos a operaciones similares con cifras diferentes.

Véase el primer ejemplo que proponemos que combina sumas y restas. Se trata de sumar 12 con 7 y restar 4. Es evidente que el resultado que debemos obtener es: 15, pero veamos como manejamos la máquina en la figura 58. La primer tecla que debe oprimirse siempre en cuanto se enciende la máquina, en este caso con la tecla *ON* que hace aparecer un *0* luminoso en el visor, es la tecla de borrado, por si quedara una cifra anterior; ello no puede ocurrir al apagar la máquina, pues ello borra toda cifra acumulada, pero sí durante el manejo. La tecla de borrado en esta máquina está indicada como *CE/C* y es la que se usa también para corregir un tecleado incorrecto. Si durante la operación marcamos por ejemplo *6* en vez de 7, la tecla de corrección elimina ese *6* y podemos teclear el 7 sin problemas. Después de teclear el = la tecla de borrado cancela toda la operación dejando el visor en *0*.

Volvamos a la operación propuesta; tecleamos,

OPERACION INDICADA

12 + 7 – 4 = 15

TECLEADO

CE/C	1	2	+	7	–	4	=
0	1	12	12	7	19	4	15

VISOR

Fig. 58. – Esquema operativo para suma y resta.

OPERACION INDICADA

5 × 6 ÷ 3 = 10

TECLEADO

CE/C	5	×	6	÷	3	=
0	5	5	6	30	3	10

VISOR

Fig. 59. – Esquema operativo para multiplicación y división.

en ese orden: *CE/C*, 1, 2, +, 7, –, 4, =. En el visor habremos visto en orden sucesivo: 0, 1, 12, 12, 7, 19, 4, 15 y luego borramos todo con la tecla *CE/C* nuevamente.

Hay una importante aclaración que formular y es que en el ejemplo no aparecen cifras decimales. Si las hubiera, debemos teclear el punto cuando corresponde coma y dejamos que la máquina se encargue del problema de mezclar cantidades con y sin decimales, porque esta máquina, como la gran mayoría de modelos que se encuentran en el mercado es del sistema llamado *coma flotante* que no necesita igualar cifras decimales para sumar o restar varias cantidades. Entonces, para sumar por ejemplo 24 + 3,75 + 42,8 tecleamos simplemente las cifras en la forma como las hemos escrito y la máquina resuelve el resto del problema.

91. – Esquema para multiplicación y división

En forma muy similar a la explicada se procede para productos y cocientes, tal como se indica en la secuencia de la figura 59. En la parte superior se propone la operación modelo, en la segunda línea se indica la serie de teclas a oprimir en el orden en que se lee la línea y en la tercera

OPERACION INDICADA

$$\frac{3^5}{2^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = 30{,}375$$

TECLEADO

CE/C	3	×	=	=	=	=
0	3	3	9	27	81	243

÷	2	=	=	=
243	2	121,5	60,75	30,375

VISOR

Fig. 60. – Esquema operativo para potencias.

línea se indican las cifras que iremos viendo en el visor luminoso. Hacemos la aclaración que si algunas cantidades son cifras con decimales, marcaremos el punto cuando corresponda una coma y lo veremos puesto en el resultado, tal como lo dijimos para suma y resta y como veremos en algunos ejemplos más adelante.

92. – Esquema para potencias y raíces

Es muy curiosa la manera como se opera con potencias en esta máquina y en la mayoría de

OPERACION INDICADA

3 + 2 = 5
6 + 2 = 8
4 + 2 = 6

TECLEADO

CE/C	3	+	2	=	6	=	4	=
0	3	3	2	5	6	8	4	6

VISOR

OPERACION INDICADA

4 – 2 = 2
5 – 2 = 3
7 – 2 = 5

TECLEADO

CE/C	4	–	2	=	5	=	7	=
0	4	4	2	2	5	3	7	5

VISOR

Fig. 61. – Simplificación operativa para sumando constante.

las de entrada algebraica. Veamos la operación indicada en la figura 60. Se trata del cociente entre 3 elevado a la quinta potencia y 2 elevado a la tercera potencia. El tecleo seriado nos indica que para multiplicar el 3 cinco veces por si mismo basta marcar el 3, el signo X y cuatro veces el signo =. Luego marcamos el signo que marca la división y hacemos lo propio con el 2, marcándolo, luego el signo = tres veces. A poco que se piense se comprenderá que lo que hemos hecho es reiterar el producto de 3 X 3 cuatro veces más por tener un exponente 5 y al dividir hemos dividido tres veces por 2 que es correcto. Vale la pena destacar la simplicidad operativa de estas máquinas.

Para extraer la raiz cuadrada no vale la pena hacer un esquema operativo, pues se teclea la cantidad de la que se desea extraer la raiz, a continuación se teclea el símbolo radical y en el visor leemos directamente el resultado. No puede haber mayor simplicidad si comparamos esto con hacer la misma operación sin la calculadora (página 10).

93. – Operaciones con constante

Muchas veces se presenta el caso de una serie de operaciones en las que aparece un sumando o un factor constante, es decir que en todas las operaciones hay una cifra que es común a las otras. Tal serie se puede realizar de la manera convencional o aprovechando la ventaja que tiene este tipo de minicalculadoras de ahorrar tecleado. La figura 61 nos muestra un caso de sumando o restando constante y vemos que la cifra 2 que aparece en toda la serie no se teclea más que una vez. Es obvio que si en lugar de 2 fuera otra el caso es idéntico. Basta seguir la secuencia de tecleo para advertir la simplificación.

En la figura 62 podemos ver el caso para un factor o un divisor constante. En el primer ejemplo aparece un 3 como factor constante en las

OPERACION INDICADA

4 x 3 = 12

2 x 3 = 6

7 x 3 = 21

TECLEADO

CE/C	4	x	3	=	2	=	7	=
0	4	4	3	12	2	6	7	21

VISOR

OPERACION INDICADA

$\frac{20}{4} = 5$ $\frac{18}{4} = 4{,}5$ $\frac{32}{4} = 8$

TECLEADO

CE/C	20	÷	4	=	18	=	32	=
0	20	20	4	5	18	4.5	32	8

VISOR

Fig. 62. – Simplificación operativa para factor constante.

OPERACION INDICADA

CANT.	PRECIO UNIT.	IMPORTE
5	7,50	37,50
15	4,30	64,50
40	8,20	328,00
	TOTAL	430,00

TECLEADO

CE/C	5	x	7,50	=	M+	15	x
0	5	5	7.50	37.5	37.5	15	15

4,30	=	M+	40	x	8,20
4.30	64.5	64.5	40	40	8.20

=	M+	MR	MC	CE/C
328.	328.0	430.0	430.0	0

VISOR

Fig. 63. – Ejemplo de operaciones con uso de memoria.

tres series y lo tecleamos una sola vez. En el segundo ejemplo aparece un divisor 4 que es común en las tres series y lo tecleamos también una sola vez.

No vale la pena insistir en estos ejemplos pues se trata simplemente de una simplificación que no es indispensable utilizar pero que resulta interesante cuando se tiene una columna de operaciones indicadas en las cuales hay una cifra que se repite en todas las líneas. Ejemplo clásico es la conversión de moneda; se coloca la cifra de paridad cambiaria en la máquina y luego se teclea la cantidad a cambiar. Cada cantidad que se teclea seguida del signo = dará la cifra equivalente.

94. – Esquema con uso de memoria

La memoria en las calculadoras retiene una cifra para ser usada posteriormente o para ir sumando parciales de operaciones sucesivas. La más usada corrientemente es la segunda de estas posibilidades y daremos un ejemplo para demostrarlo. El caso más típico es el de la facturación que mostramos en la figura 63. Se trata de hacer los productos parciales de cantidades por precios unitarios y retener mediante la memoria el importe parcial que se va sumando cada vez que opri-

mimos la tecla *M*+. Al final de la factura obtenemos la suma total sin hacerla mediante tecleado sino oprimiendo simplemente la tecla *MR*. Para borrar esa suma para seguir operando debemos oprimir la *MC* (corrección-memoria) y la tecla de borrado general. Sigamos la secuencia del tecleado y la que indica las cifras que van apareciendo en el visor, y advertiremos que la operación de facturación o similar es de una simplicidad notable.

95. – Resolución de fórmulas

Entramos ahora al uso de las calculadoras en operaciones algebraicas simples. Mientras no se necesiten logaritmos, trigonometría y algunas otras modalidades de cálculo que solo pueden realizarse con las maquinitas del tipo científico, podemos arreglarnos con la que estábamos explicando. Mediante procesos algebraicos llegamos a una fórmula en la cual reemplazamos las letras por sus valores numéricos y así tenemos una operación indicada que tiene una serie de operaciones simples de las que hemos mostrado hasta ahora. En la figura 64 tenemos un ejemplo de lo dicho y la observación de la secuencia de tecleo nos explica el procedimiento. Puede comenzarse por el numerador o por el denominador, ya que al final de las operaciones en uno o en otro retenemos el resultado parcial con la memoria. En este caso comenzamos por el denominador, haciendo la suma dentro del paréntesis, luego multiplicamos el 11 obtenido por si mismo ya que hay un exponente 2; si hubiera un exponente mayor sabemos que sería cuestión de teclear repetidamente el signo igual, como

OPERACION INDICADA

$$\frac{15 \times 3 + 2}{(4 + 7)^2 - 3} = \frac{47}{118} = 0{,}398305$$

TECLEADO

CE/C	4	+	7	=	×	11
0	4	4	7	11	11	11
–	3	=	M+	15	×	3
121	3	118	118	15	15	3
+	2	÷	MR	=		
45	2	47	118	0.398305		

VISOR

Fig. 64. – Esquema operativo para resolución de fórmulas.

Se invierten $ 100.– al 60% anual con capitalización trimestral. Se desea saber el monto al año.

OPERACION INDICADA: $M = C\ (1 + i)^n$ donde: M: monto final; i = interés durante el período $= \frac{0{,}60 \times 3}{12}$

$$M = 100 \left(1 + \frac{0{,}60 \times 3}{12}\right)^4 = 174{,}90062$$

TECLEADO

CE/C	0,60	×	3	÷	12	+
0	0.60	0.60	3	1.8	12	0.15
1	=	×	=		=	
1	1.15	1,15	1.3225		1.520875	
=	×	100	=			
1.749002	1.7490062	100	174.90062			

VISOR

Fig. 65. – Esquema operativo para operaciones de capitalización.

en la figura 60. Después de restar el 3 y obtener 118 reservamos esta cifra mediante la tecla *M*+ y resolvemos el numerador, el cual nos da 47. En ese momento debemos dividirlo por el resultado del denominador, es decir que marcamos el signo ÷ y llamamos la cifra retenida mediante la tecla *MR* y al teclear el = sale el resultado final.

96. – Operaciones financieras

Si bien la operación ilustrada en la figura 63 puede englobarse en este título hemos considerado que no tenía un carácter netamente financiero. Las operaciones financieras resultan de fórmulas típicas en las cuales se reemplazan las letras por sus valores equivalentes en cada caso para obtener un resultado. Un ejemplo típico es el de la capitalización que proponemos en la figura 65, que consiste en averiguar en qué monto se transforma una inversión con capitalización durante el período de la operación financiera. Para resolverlo se reemplazan en la fórmula que da el monto *M* las letras que expresan el capital, el interés durante cada período de capitalización *i* y el número de períodos *n* y se procede luego como un caso de fórmula algebraica que ya ha sido tratado. Siguiendo la secuencia del tecleado y la que nos muestra la sucesión de cifras que vemos en el visor el lector podrá realizar sin dificultades esta operación y cualquier otra similar. Se advierte que en estas operaciones se obtienen muchas veces una

Un producto cuyo precio de venta es $ 100.— se vende con pago diferido a 30, 60 y 90 días sin intereses. La devaluación monetaria es del 5% mensual. Se desea saber el monto real, a moneda constante, que se percibirá y el recargo necesario en la facturación para compensar la descapitalización. La fórmula es:

$VD = \dfrac{C}{(1+i)^n}$ donde: VD: valor devaluado; i: devaluación mensual; n: períodos de cobro. Reemplazando valores tenemos: $VD = \dfrac{100}{(1+0{,}05)^3} = 86{,}383759$

TECLEADO

CE/C	1	+	0,05	=
0	1	1	0.05	1.05
x	1,05	x		x
1.05	1.05	1.1025		1.157625
÷	100	↔		=
1.157625	100	1.157625		86.383759

VISOR

Y para calcular a cuánto debe incrementarse la facturación para compensar la descapitalización, empleamos la fórmula:

$VA = \dfrac{C \times 100}{VD} = \dfrac{100 \times 100}{86{,}383759} = 115{,}7625$

donde: VA = valor actualizado; C = facturación primitiva

Fig. 66. – Esquema operativo para operaciones de devaluación.

serie de decimales y que ellos deben redondearse para tener el resultado real bancario.

Otro ejemplo típico es el de la devaluación que mostramos en la figura 66. En las operaciones comerciales de venta con pago diferido es común que se quiera saber el recargo a realizar en la facturación para cobrar la mercadería en importes correspondientes a moneda constante, es decir que quede compensada la devaluación monetaria. Entonces se denomina *VD* al valor devaluado a cobrar. Reemplazando valores en la fórmula y realizando las operaciones típicas que corresponden a una fórmula, la secuencia de tecleado y la de lecturas en el visor luminoso nos guian perfectamente para operar. Obtenido *VD*, una segunda fórmula nos permite encontrar el valor actualizado *VA* que representa en moneda constante la cifra legítima que debemos cobrar para evitar la descapitalización. Este valor *VA* es el que se usa para facturar.

Obsérvese que en esta operación hemos usado por primera vez la tecla de inversión de operación (↔) porque en el cálculo del valor *VD* hemos comenzado por el denominador y luego dividimos ese denominador por el numerador, pero antes de teclear el signo = para tener el resultado tecleamos la inversión y entonces se invierte el divisor con el dividendo. Igual se procedería para invertir una operación de suma por resta y viceversa.

97. – Calculadoras científicas

Cuando se necesita realizar operaciones matemáticas en las que intervienen logaritmos, funciones trigonométricas, exponenciales, raices que no sean la cuadrada, etc. hay que disponer de tablas que dan esos valores y entonces usar la calculadora común, entrando en ella con las cifras que corresponden a la operación. Pero resulta mucho más cómodo que tales cifras que corresponden a las funciones mencionadas aparezcan directamente en la máquina y eso es lo que suministran las calculadoras llamadas científicas. De entre las que se encuentran en nuestro mercado hemos tomado la CASIO modelo fx21 que mostramos en la figura 67. Se trata de una maquinita que solo mide 145 mm de largo por 84 mm de ancho por 24,6 mm de altura y que funciona con solo dos pilitas secas, con pilas recargables o conectada a la red eléctrica mediante una fuente conversora especial. Esta máquina posee 21 diferentes funciones y mediante un sistema especial extiende sus 8 dígitos hasta un centenar, recurriendo a un factor 10 elevado a la potencia 99.

En las operaciones básicas que explicamos anteriormente, es decir las seis operaciones fundamentales, la memoria, la inversión, etc. no se presentan diferencias con la máquina antes explicada salvo en detalles que aparecen correctamente aclarados en el folleto explicativo que acompaña a la máquina. Pero donde aparecen las novedades de interés es cuando se utilizan las teclas especiales que podemos ver en la parte superior de la vista frontal de la máquina.

En efecto, algunos ejemplos de las grandes posibilidades que ofrece nos mostrarán el uso de tales teclas. Por ejemplo, para convertir grados del sistema sexagesimal al centesimal, se usa una tecla especial (°' ") de la siguiente manera:

operación: 63° 52' 41" = 63,878055

se teclea: 63 (°' ") 52 (°' ") 41 (°' ")

y en el visor tenemos: 63,878055

Para obtener logaritmos escribimos el número

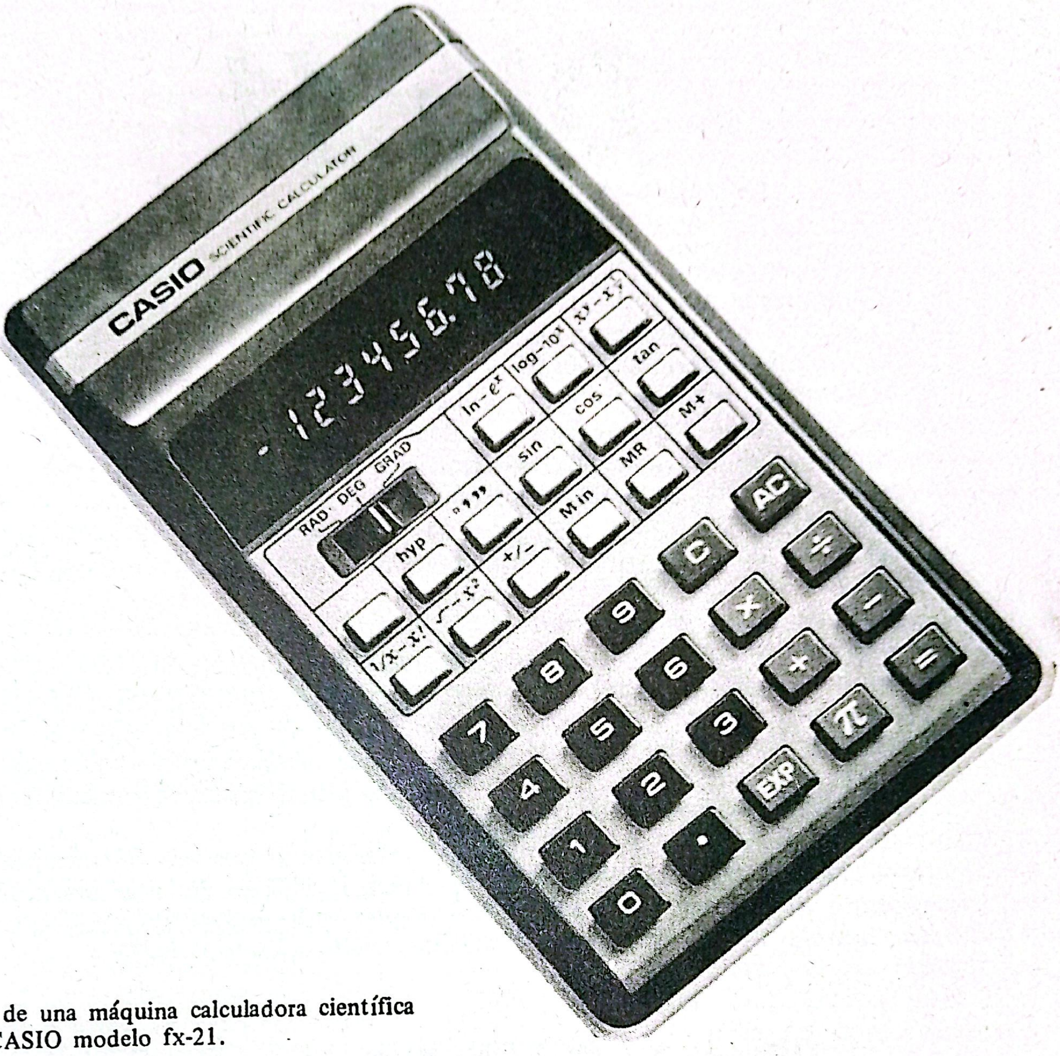


Fig. 67. – Vista de una máquina calculadora científica CASIO modelo fx-21.

y a continuación tecleamos log ó ln según deseemos el decimal o el natural, obteniendo en el visor directamente el buscado. Es evidente que si ese logaritmo aparece como parte de una operación múltiple lo podemos incorporar a la misma sin inconvenientes en forma directa si aparece al principio o recurriendo a la memoria como hicimos la figura 64.

Para funciones exponenciales se procede también en forma directa, actuando con las teclas previstas para el caso. Veamos algunos ejemplos para notar la sencillez:

operación: $e^{7,89} = 2670,44$

se teclea: 7.89 (arc) (ln e^x)

y en el visor tenemos: 2670,44

operación:

$$\sqrt[5]{5,3} = 5,3^{1/5} = 1,3959$$

se teclea:

5.3 (arc) (x^y $x^{1/y}$) 5 =

y en el visor tenemos: 1,3959

Y podríamos seguir indefinidamente dando ejemplos, que hemos tomado del folleto que trae la máquina, para demostrar las posibilidades disponibles. Como se ve, con una calculadora científica podemos realizar prácticamente la mayor parte de las operaciones matemáticas conocidas.

Día 11

Hemos avanzado lo bastante con el estudio de las Matemáticas como para poder considerar que se ha cumplido un curso elemental. En efecto, después del repaso general de Aritmética entramos de lleno en las relaciones y proporciones, cálculo literal, ecuaciones, medidas y sus aplicaciones a la Geometría; de esta última también estudiamos los ángulos, triángulos y representaciones gráficas. Más adelante, completamos los conocimientos básicos con el estudio de los logaritmos y la trigonometría. Podría terminarse aquí este libro y el lector estaría en condiciones de interpretar muchas obras técnicas en las que aparecen fórmulas sencillas, cuadros, gráficos, etc.; pero hay muchas materias especializadas que requieren otros conocimientos de Matemáticas y por tal razón debemos continuar con nuestra tarea.

Los temas que abordaremos en la presente y en las próximas jornadas tienen una aparente complejidad que no debe impresionar al lector, pues una vez que conoce el mecanismo de su aplicación son de fácil comprensión. Por ejemplo, el tema que nos ocupará ahora es poco conocido para los lectores que no han intentado leer un libro superior de Electricidad o de Electrónica, pero una vez que aprendan a operar con las cantidades complejas comprobarán la facilidad con que interpretan el cálculo de los circuitos.

Así planteada la necesidad de seguir adelante por exigencias de nuestro objetivo, cabe recordar una vez más que antes de leer lo que sigue debe el lector asegurarse de que ha entendido perfectamente todo lo anterior; si así no fuera es indispensable un repaso previo. Cumplido, comencemos la tarea.

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

Los números o cantidades complejas constituyen un valioso auxiliar para una gran cantidad de planteos matemáticos dentro de la técnica y por ello debemos prestar toda la atención a este tema y asimilarlo como una manera de operar sin entrar a analizar otros problemas. Básicamente, una cantidad *compleja* es aquella que está compuesta por una parte *real* y otra *imaginaria*. Ahora trataremos de quitarle el carácter misterioso a esa definición.

Los números o cantidades *reales* son todos aquellos que hemos conocido hasta ahora; con ellos podemos efectuar las operaciones simples de la Aritmética, podemos elevarlos a cualquier potencia o extraerles una raíz de cualquier índice, no importando si se obtiene un resultado exacto. Podemos encontrar su logaritmo. Las letras en el Algebra son cantidades reales mientras su valor numérico sea real. Hasta aquí nada nuevo.

98. — Números imaginarios

Recordemos lo que hemos estudiado acerca de la raíz cuadrada; esa operación consistía en encontrar un número que multiplicado por sí mismo nos daba la cantidad subradical. Es decir que si tenemos el siguiente caso:

$$\sqrt{25} = 5$$

la operación de extraer la raíz cuadrada de 25 consiste en encontrar un número, el 5, que multiplicado por sí mismo nos da la cantidad subradical que es 25, o sea:

$$5^2 = 25$$

Esto no presenta ninguna dificultad y lo dicho puede aplicarse en idéntica forma si la cantidad subradical fuera un decimal, un quebrado, etc., o si el resultado de la operación no fuera una cantidad entera o exacta.

Pero al estudiar la radicación en Algebra,

sección 28, habíamos aclarado que la raíz cuadrada de una cantidad cualquiera positiva podía tener dos valores, el positivo y el negativo, ya que, en el ejemplo anterior hemos dicho que 5 era la raíz cuadrada de 25, pero también es cierto que:

$$\sqrt{25} = -5$$

puesto que si multiplicamos por si mismo al número (-5) también se obtiene la cantidad 25:

$$(-5)\,(-5) = 25$$

Entonces, la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos resultados de igual valor numérico, uno positivo y otro negativo, lo que se escribe así:

$$\sqrt{25} = \pm 5$$

Esta conclusión no tiene importancia en la Aritmética elemental porque en ella se toma siempre el resultado positivo. En Matemáticas debe expresarse el resultado con el doble signo, por ser ello lo que corresponde. La operación de radicación de índice 2 da dos raíces por resultado.

Pero ahora plantearemos un nuevo problema. Supongamos que como resultado de una ecuación algebraica debemos extraer la raíz cuadrada de:

$$\sqrt{-25}$$

Y evidentemente el lector llegará a la conclusión de que el resultado de la operación no es ni 5 ni -5, puesto que en ambos casos al multiplicar esos números por sí mismos encontramos una cifra 25 positiva, nunca negativa. En Aritmética se dice que la raíz cuadrada de un número negativo no existe, que es *imaginaria*, o sea que no es real.

En Matemáticas se estudia el problema con otro criterio, y se sale del pozo en que estábamos haciendo una convención; se considera a la cantidad negativa subradical como el producto de igual cantidad, pero positiva, multiplicada por el número -1 o sea la unidad con signo negativo. El caso anterior se escribiría así:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(25)\,(-1)} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1}$$

Pero ahora podemos hacer algo, ya que la raíz cuadrada del número 25 positivo la sabemos calcular, es 5 con el doble signo; y la raíz de (-1) es un imposible aritmético pero le asignamos un símbolo y lo dejamos escrito. Ese símbolo es la letra i en Matemáticas, pero como en Electricidad esa letra se usa para designar la *intensidad* de la corriente eléctrica, la técnica prefiere usar la letra j y se la llama *unidad imaginaria* u *operador j*.

En el ejemplo último el resultado de la raíz de (-25) quedaría expresado como el producto de la raíz real por el operador j, o sea:

$$\sqrt{-25} = \pm 5\,j$$

Y hemos llegado a obtener una *cantidad imaginaria*, de acuerdo con la definición matemática. El operador j vale siempre:

$$j = \sqrt{-1}$$

y obsérvese la particularidad de que si se nos presenta elevado al cuadrado se convierte en un número real, ya que:

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Es decir que la unidad imaginaria elevada al cuadrado se convierte en la unidad negativa, un número real. En los procesos derivados de operaciones con números imaginarios puede ocurrir que el resultado final sea una cantidad real, por presentarse el caso anterior.

Como condición fundamental aplicable a los números imaginarios, los cuales se presentan siempre bajo la forma:

$$a\,j$$

en la cual a es un número cualquiera, se tiene que dos números imaginarios son iguales si tienen iguales sus coeficientes reales; decimos que:

$$a\,j = b\,j$$

cuando son iguales sus coeficientes reales:

$$a = b$$

99. — Operaciones con números imaginarios

Las operaciones fundamentales de la Aritmética y el Algebra se realizan con las cantidades imaginarias en la misma forma y siguiendo las mismas reglas que para los números reales.

Veamos los casos más simples, como son los de suma y resta, dando directamente los

ejemplos, ya que no presentan ninguna dificultad:

$$2j + 5j = 7j$$
$$-3j - 4j = -7j$$
$$-2j + (-3j) = -5j$$
$$-4j - (-2j) = -2j$$

que no necesitan comentarios. El resultado de la suma algebraica de números imaginarios es, lógicamente, otro imaginario.

Veamos ahora el producto de un número imaginario por un número real. Se procede igual que si el operador no existiera y se coloca a éste al resultado:

$$(3j) \times 2 = 6j$$
$$-2j4 = -8j$$
$$4j(-2) = -8j$$
$$(-3j)(-5) = 15j$$

con la aclaración de que los paréntesis que hemos usado no siempre eran necesarios, sino que se pusieron para aclarar bien la operación a realizar.

Con los cocientes se procede de idéntica manera; los siguientes ejemplos muestran los resultados de dividir un número imaginario por otro real:

$$\frac{3j}{2} = 1{,}5j$$

$$\frac{-4j}{-2} = 2j$$

$$\frac{7j}{-2} = -3{,}5j$$

Y resulta que al dividir o multiplicar un número imaginario por otro real se obtiene un número imaginario.

La elevación a potencia del operador j da por resultado la unidad o el mismo operador, con signo positivo o negativo según el orden de la potencia:

$$j^1 = j$$
$$j^2 = -1$$
$$j^3 = j^2 j^1 = -j$$
$$j^4 = j^2 j^2 = 1$$
$$j^5 = j^4 j^1 = j$$
$$j^6 = j^5 j^1 = j^2 = -1 \qquad \text{etc.} \ldots$$

Veamos ahora los productos y cocientes de números imaginarios entre sí. Primero los casos de producto; unos ejemplos mostrarán los resultados que se obtienen:

$$2j4j = 8j^2 = -8$$

puesto que el cuadrado del operador j vale -1.

$$3j2j5j = 30j^3 = -30j$$

puesto que el cubo del operador j, según lo vimos antes, vale $-j$. Resulta así que el producto de una cantidad par de imaginarios da un número real y el producto de una cantidad impar de imaginarios da otro imaginario.

Veamos algunos ejemplos de cocientes; los ejemplos con sus resultados serán suficientemente explícitos:

$$\frac{6j}{3j} = 2$$

$$\frac{8j}{-4j} = -2$$

Luego, el cociente de dos imaginarios da siempre un resultado real.

100. — Números complejos

Conocemos ya las cantidades o números reales y las cantidades o números imaginarios; la combinación de una cantidad real y una imaginaria, formando un binomio, se llama *cantidad compleja* o *número complejo* y también directamente *complejo*. La forma general de expresar un complejo es, entonces:

$$a + bj$$

en cuyo binomio se sobreentiende que las letras a y b tienen un equivalente numérico; por ejemplo:

$$2 + 3j$$

es un número complejo. La cantidad a se llama parte *real* del complejo y la cantidad bj se llama parte *imaginaria* del complejo.

Es evidente que si las cantidades a o b valen cero, el complejo se transforma en un número real o en un número imaginario puro. En efecto:

$$0 + bj = bj$$
$$a + 0j = a$$

que no necesita demostración.

Otra observación interesante se refiere a la igualdad de complejos. Dos cantidades complejas son iguales si tienen iguales sus partes

reales e imaginarias. Los dos complejos:

$$a + b\,j$$
$$c + d\,j$$

son iguales si se cumple:

$$a = c$$
$$b\,j = d\,j$$

101. — Representación vectorial

Si pensamos que los números reales son positivos o negativos y quisiéramos representarlos en un gráfico, bastaría tomar una recta indefinida, marcar sobre ella un centro u origen y medir hacia un lado las cantidades

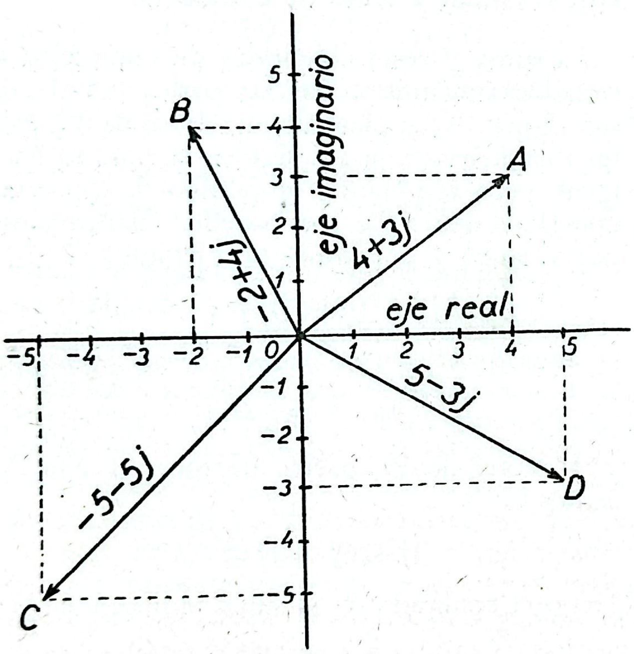


Fig. 68. — Representación gráfica de cantidades complejas.

positivas y hacia el otro de ese origen las cantidades negativas. En el capítulo 6, sección 59, hemos visto que una cantidad se podía representar en un gráfico mediante una escala, de modo que no habría ningún problema en lo que hemos propuesto.

Sobre el eje mencionado se medirían las cantidades reales. Una cantidad imaginaria no podría ser medida sobre ese eje real y entonces se ha convenido en tomar otro eje, perpendicular al primero, para medir sobre él a las cantidades imaginarias. Se dispondría así de un par de ejes coordenados o cartesianos como el de la figura 40. El eje horizontal o de abscisas sería el *eje real* y el vertical o de ordenadas el *eje imaginario*, debiendo entenderse que la denominación se refiere al uso de tales ejes para medir sobre ellos cantidades de diferente naturaleza.

Así llegamos a la figura 68, que muestra el par de ejes coordenados con centro en *O*. Sobre los mismos se marcan unidades y se conviene en que desde *O* hacia la derecha las cantidades son positivas y hacia la izquierda son negativas. Para el eje imaginario, tomamos positivas las cantidades hacia arriba de *O* y negativas hacia abajo.

La representación gráfica de los complejos, o representación *vectorial*, consiste en tomar para cada complejo una recta como la *OA* en la cual uno de sus extremos es el centro *O* y el otro el punto *A* que se halla midiendo en el eje de abscisas la parte real y en el eje de ordenadas el coeficiente de la parte imaginaria. Por ejemplo, si se tiene un complejo:

$$4 + 3\,j$$

y tomamos la cantidad 4 positiva desde *O* hacia la derecha y el coeficiente 3 positivo desde *O* hacia arriba y a partir de los puntos a que hemos llegado trazamos las paralelas a los ejes, se llega al punto *A*. La recta o *vector OA* representa al complejo anterior.

Veamos otros ejemplos. Sea el complejo $-2 + 4\,j$; la parte real es -2, es decir que la debemos medir hacia la izquierda de *O* y el coeficiente 4 es positivo, luego lo tomamos hacia arriba; llegamos así al punto *B* que será el extremo del vector *OB* representativo del complejo dado.

En la misma forma representamos los complejos:

$$-5 - 5\,j$$
$$5 - 3\,j$$

El primero de ellos tomando hacia la izquierda el número 5 por ser negativo y hacia abajo el coeficiente 5 por serlo también; se llega al punto *C*, extremo del vector *OC* que representa al mencionado complejo. El otro caso tiene una parte real positiva e igual a 5, que tomamos hacia la derecha; la parte imaginaria tiene un coeficiente -3 que debemos tomar hacia abajo y llegamos al punto *D* extremo del vector *OD* representativo del complejo dado.

102. — Complejos conjugados

En las operaciones con cantidades complejas resulta de interés aplicar algunas veces un

artificio de cálculo mediante el *complejo conjugado*. Entonces, definiremos a éste diciendo que dos complejos son conjugados cuando tienen sus partes reales iguales y sus partes imaginarias de igual valor pero de signo opuesto. Los dos complejos:

$$5 + 3j$$
$$5 - 3j$$

son conjugados porque sus partes reales son iguales en valor y signo y sus partes imaginarias tienen igual coeficiente, pero con signos contrarios.

Si vamos a la representación gráfica de los complejos, la figura 69 nos muestra la parti-

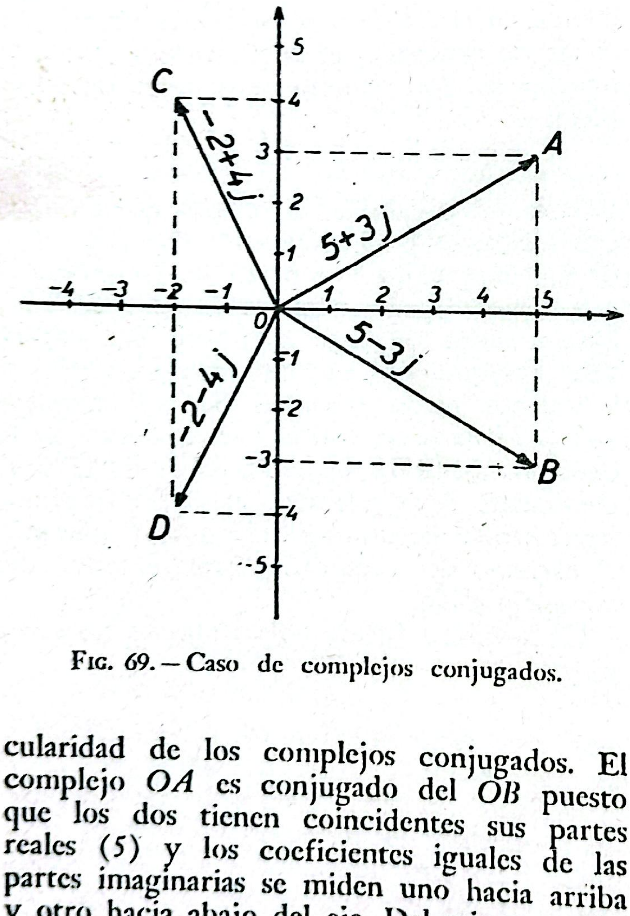


Fig. 69. — Caso de complejos conjugados.

cularidad de los complejos conjugados. El complejo OA es conjugado del OB puesto que los dos tienen coincidentes sus partes reales (5) y los coeficientes iguales de las partes imaginarias se miden uno hacia arriba y otro hacia abajo del eje. Del mismo modo, los complejos OC y OD son conjugados; se ve por sus vectores y se ve también escribiéndolos en su forma algebraica:

$$-2 + 4j$$
$$-2 - 4j$$

Quiere decir que si se nos pide que escribamos el conjugado de cualquier complejo no tendríamos dificultad, pues lo escribiríamos igual, salvo en el signo del coeficiente de la parte imaginaria, que sería contrario.

103. — Operaciones con complejos

Con las cantidades complejas pueden realizarse las operaciones fundamentales del Algebra sin ninguna dificultad, siempre que se respeten las reglas de los signos y que se trate separadamente a las partes reales e imaginarias. En general, un complejo debe ser considerado como un binomio cuyos términos no son homogéneos entre sí; luego no pueden hacerse operaciones entre ellos, pero si tenemos dos binomios, pueden sumarse, restarse, etc., las partes reales y las partes imaginarias separadamente, con lo que se llegará a un nuevo binomio que será el complejo resultante.

104. — Suma y resta de complejos

La suma y resta algebraica de complejos se resuelve sumando todas las partes reales con sus signos, separadamente de la suma de partes imaginarias con sus signos; la resta se hace igual, pero respetando el cambio de signo del complejo que debe ser restado. Comencemos por la suma y pongamos un ejemplo:

$$(2+3j) + (4+5j) + (-3-2j)$$

la suma de las partes reales con sus signos da:

$$2 + 4 - 3 = 3$$

y la suma de las partes imaginarias con sus signos da:

$$3j + 5j - 2j = 6j$$

luego el resultado de la suma indicada es:

$$3 + 6j$$

que es otro complejo, como se había anunciado.

Un caso particular de la suma de complejos resulta cuando los complejos a sumar son conjugados. En efecto, tomemos dos conjugados en su forma algebraica:

$$(a + bj) + (a - bj)$$

y sumando ordenadamente las partes real e imaginaria se tiene:

$$(a + a) + (bj - bj) = 2a$$

es decir que desaparece la parte imaginaria y el resultado es una cantidad real igual al doble de las partes reales de los conjugados.

Veamos ahora la resta algebraica de complejos. Un ejemplo a resolver será lo sufiente-

mente explicativo. Se tiene la siguiente resta:

$$(5 + 3j) - (3 + 2j)$$

y restando separadamente las partes reales e imaginarias tenemos:

$$5 - 3 = 2$$
$$3j - 2j = j$$

luego el resultado de la resta será otro complejo:

$$2 + j$$

en el cual, por coincidencia, el coeficiente de la parte imaginaria vale la unidad. En otro ejemplo veremos el caso de que se tengan signos negativos en uno de los complejos o en ambos. Sea la resta:

$$(4 - 2j) - (-2 + 5j)$$

y resolviendo separadamente las restas para las partes real e imaginaria:

$$4 - -2 = 4 + 2 = 6$$
$$-2j - +5j = -2j - 5j = -7j$$

con lo que el resultado es el complejo:

$$6 - 7j$$

Un caso particular puede presentarse al sumar o restar complejos; se trata que los signos de las partes imaginarias sean tales que al hacer la operación desaparezca esa parte y quede solamente la parte real. Aclaramos que no se trata del caso de complejos conjugados, sino de casos cualesquiera, con partes reales diferentes en valor y signo. Pongamos un ejemplo para ver cómo se produce el caso:

$$(7 + 5j) + (2 - 3j) - (3 + 2j)$$

que es una combinación de suma y resta algebraicas; resolviendo ordenadamente, como hicimos antes, se tiene:

$$7 + 2 - 3 = 6$$
$$5j + -3j - +2j = 5j - 3j - 2j = 0$$

luego el complejo resultante no es tal sino que ha quedado reducido a un número real, el 6, pues la parte imaginaria se anuló. Este caso particular debe considerarse como casual, pero si se presenta no debe pensarse que se he hecho mal la operación. Para visualizar cómo se puede anular la parte imaginaria al sumar o restar complejos, debemos estudiar la suma gráfica, que veremos de inmediato.

105. — Suma vectorial de complejos

Las operaciones de suma y resta de complejos se pueden efectuar por medio del Algebra, como se ha explicado, pero en la técnica tiene aplicación el procedimiento gráfico, no tanto para hacer cálculos del resultado como para hacer demostraciones rápidas y evidentes. En la figura 68 vimos cómo se representaban los complejos mediante vectores; ahora veamos cómo se suman gráficamente esos vectores, para lo cual nos trasladamos a la figura 70.

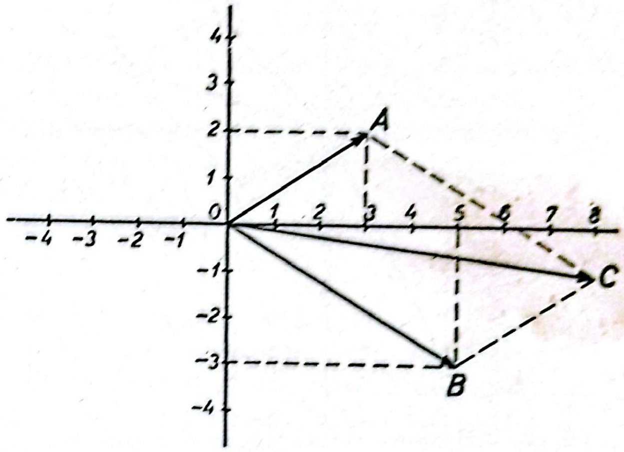


FIG. 70. — Suma vectorial de dos complejos.

Sean dos complejos, cada uno representado por su vector OA y OB respectivamente. En forma algebraica esos complejos se escriben así:

$$3 + 2j$$
$$5 - 3j$$

y al sumarlos se tiene el siguiente resultado:

$$(3+5) + (2j-3j) = 8 - j$$

que es otro complejo; pero veamos el procedimiento de suma gráfica o *vectorial* de complejos. Se dibujan los dos vectores, cada uno de los cuales representa a uno de los complejos a sumar. Son los OA y OB; ahora, por el extremo A trazamos una paralela al vector OB y por el extremo B una paralela al vector OA. Ambas rectas auxiliares se cortan en el punto C, que unido con O nos da un vector OC que es el resultado de la suma de los otros dos. Para comprobarlo, escribamos el complejo algebraico que corresponde al vector OC. La parte real es 8 y la parte imaginaria es $-j$, luego se tiene:

$$8 - j$$

que es precisamente el complejo resultante de la suma anterior.

Destaquemos, de paso, que si el punto *C* cae sobre el eje horizontal, se presenta el caso de anulación de la parte imaginaria que habíamos mencionado antes como una coincidencia posible.

El procedimiento de suma vectorial se puede aplicar al caso de suma de varios vectores

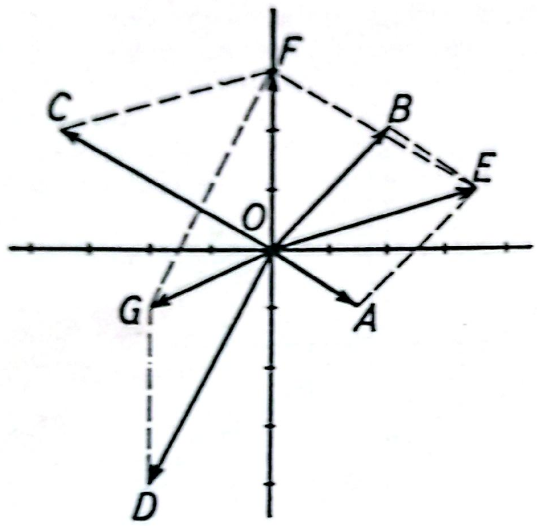


Fig. 71. — Suma vectorial de varios complejos.

sin inconvenientes, tomando primero dos de ellos; al resultado de la suma se le adiciona el tercero, luego el cuarto, etc. Para comprender mejor lo que acabamos de decir pongamos un ejemplo gráfico de suma vectorial de varios complejos o vectores. La figura 71 nos ilustra sobre tal ejemplo.

Tenemos cuatro vectores a sumar, cada uno de los cuales es un complejo que podemos escribir en forma algebraica, cosa que dejamos para la comprobación de que hemos obtenido gráficamente un resultado correcto. Primero hagamos la suma gráfica. Sumamos el vector *OA* con el *OB*, mediante las paralelas *BE* y *AE* según se explicó, y obtenemos la suma de esos dos vectores que es el nuevo vector *OE*; ahora tomamos este vector *OE* y el *OC* y los sumamos, trazando las paralelas *FE* al vector *OC* y la *FC* al *OE*; el vector resultante es el *OF*, que por coincidencia cae sobre el eje vertical, cosa que no nos debe preocupar. Tomamos ahora ese nuevo vector *OF* y lo sumamos con el *OD* mediante las paralelas trazadas *FG* y *GD* que dan el punto *G* que es el extremo del nuevo vector *OG*; como se acabaron los vectores a sumar decimos que el *OG* es la suma de los cuatro vectores dados.

Escribamos algebraicamente el vector *OG*; en el gráfico, para simplificar no se escribieron los números sobre los ejes, pero contamos las marcas y se tiene que ese vector *OG* tiene una parte real —2 y una imaginaria —*j* por ser su coeficiente igual a uno. Luego tenemos:

$$OG = -2 - j$$

Y si escribimos los cuatro vectores dados en su forma algebraica se tiene:

$$OA = 1{,}5 - j$$
$$OB = 2 + 2j$$
$$OC = -3{,}5 + 2j$$
$$OD = -2 - 4j$$

Sumemos algebraicamente esos vectores; la parte real da:

$$1{,}5 + 2 + -3{,}5 + -2 = -2$$

Y la parte imaginaria, procediendo de igual manera, resulta:

$$-j + 2j + 2j + -4j = -j$$

y entonces el complejo resultante de la suma dada es:

$$-2 - j$$

que coincide totalmente con el resultado obtenido gráficamente.

106. — Resta vectorial de complejos

El problema de restar complejos en forma algebraica ya nos es conocida; ahora veamos

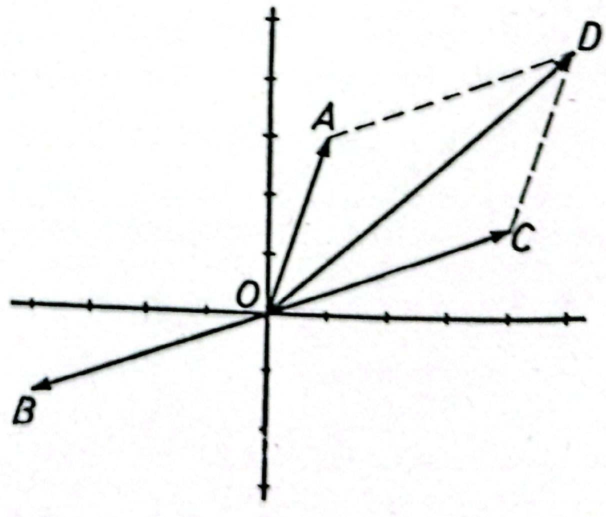


Fig. 72. — Resta vectorial de dos complejos.

cómo se procede para realizar esa operación en la forma gráfica o vectorial. La figura 72 nos muestra un ejemplo, que consiste en

efectuar la siguiente resta, que escribimos en la forma algebraica:

$$(1 + 3j) - (-4 - 1{,}5j)$$

que corresponde a los complejos cuyos vectores son OA y OB. El resultado de esa resta es el mismo que si cambiáramos el signo a los dos términos del segundo paréntesis, cosa que equivale a sacar el paréntesis afectado del signo negativo. En efecto, operemos con esa resta:

$$1 - - 4 = 5$$
$$3j - - 1{,}5\,j = 4{,}5\,j$$

o sea que la resta da:

$$5 + 4{,}5\,j$$

y lo mismo hubiera sido que escribiéramos:

$$(1 + 3j) + (4 + 1{,}5j)$$

es decir que para transformar una resta en una suma no hay más que cambiar el signo a los dos términos del segundo complejo, el sustraendo, o sea el que debemos restar. Ahora tenemos una operación de suma y eso lo sabemos hacer en forma vectorial. En efecto, en la figura 72 vemos que el vector OC que se ha tomado a partir del punto O es igual al OB, pero es inverso o sea con sus dos partes, la real y la imaginaria con signo contrario. Y una vez que hemos *dado vuelta* al segundo vector, lo sumamos con el otro OA en la forma conocida y obtenemos, mediante las paralelas AD y CD el vector OD que es la resta vectorial entre OA y OB. Escribamos el vector OD en forma algebraica:

$$5 + 4{,}5\,j$$

y comprobamos que es el mismo resultado que se obtuvo de la operación algebraica.

En el caso de operaciones vectoriales múltiples, como el planteado en la figura 71, si no se trata de sumas en todos los casos, pues hay restas también, el procedimiento a seguir sería el invertir los vectores que deben ser restados y luego sumar todos en la forma explicada. Un vector dado vuelta o invertido equivale a cambiar el signo a todo el vector, de modo que si en una operación vectorial tenemos vectores a los que debe cambiarse de signo, eso equivale a la resta algebraica de complejos y a la suma vectorial del vector inverso.

107. — Complejos multiplicados o divididos por un número real

Las operaciones algebraicas que consisten en multiplicar o dividir un complejo por un número real se resuelven como si el complejo fuera un binomio común afectado por un factor o un divisor, es decir que ese factor o divisor actúa independientemente sobre cada uno de los términos del binomio. Veamos primero el caso del producto de un complejo por un número real cualquiera. Sea la operación:

$$(3 + 4\,j) \times 6$$

el factor 6 es un número real y se interpreta como que se trata de un factor común del binomio, de modo que el resultado sale de multiplicar ambos términos por ese número o factor:

$$6 \times 3 + 6 \times 4\,j =$$
$$18 + 24\,j$$

y resulta, como es evidente, otro complejo. El número real puede tener un signo negativo y el complejo también puede tener alguno de sus términos negativos, lo que no quita generalidad al procedimiento, pues basta respetar la regla de los signos del Algebra. Veamos un ejemplo:

$$(-2 + 3\,j)\,(-5) =$$
$$(-5 \times -2) + (3 \times -5\,j) =$$
$$10 - 15\,j$$

El caso del cociente entre un complejo y un número real se resuelve de idéntica manera, dividiendo cada término del complejo por ese número o divisor común, respetando la regla de los signos. Sea la siguiente operación:

$$\frac{4 - 9\,j}{2} =$$

$$\frac{4}{2} - \frac{9}{2}\,j =$$

$$2 - 4{,}5\,j$$

Y las operaciones se han realizado sin necesidad de explicaciones adicionales, pues son evidentes; el resultado de la operación es otro complejo.

108. — Producto de complejos

Dos complejos se multiplican siguiendo las reglas del Algebra para la multiplicación de binomios, ordenando los términos reales e

imaginarios y escribiendo el resultado, que es otro complejo, en la forma clásica. En un ejemplo se pondrá en evidencia el procedimiento:

$$(3 + 4j)\ (2 - 5j)$$

Para multiplicar dos binomios se debe multiplicar cada término de uno por los dos términos del otro, respetando la regla de los signos; tenemos:

$$= (3 \times 2) - (3 \times 5j) + (2 \times 4j) - (4j \times 5j) =$$

realizamos los productos indicados y se obtiene:

$$= 6 - 15j + 8j - 20\, j^2 =$$

Antes de seguir debemos recordar que el cuadrado del operador j vale (-1) y reemplazando esa equivalencia, el último término de la ecuación se transforma en:

$$-20 \times (-1) = 20$$

y ahora agrupando los términos reales e imaginarios se obtiene el resultado final de la operación, que es otro complejo:

$$= (-6 + 20) + (8j - 15j) =$$
$$= 14 - 7\, j$$

Planteemos en forma algebraica general un caso particular interesante, que es el producto de dos complejos conjugados. Se tiene el producto:

$$(a + bj)\ (a - bj) =$$

y resolvamos el producto en la forma explicada en el ejemplo anterior:

$$= a^2 - abj + abj - b^2j^2$$

Vemos que se eliminan los dos términos abj por tener signos contrarios; además, el cuadrado del operador j vale (-1), cifra que al multiplicar a $-b^2$ lo transforma en $+b^2$. Reemplazando, tenemos el resultado de aquel producto:

$$= a^2 + b^2$$

lo que nos dice que el producto de dos complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de sus partes reales y sus coeficientes imaginarios. Y puesto que esos números se elevan al cuadrado, no importa que sus signos sean positivos o negativos; tendremos siempre la suma de sus cuadrados.

Como caso particular del producto de complejos podría tomarse la elevación al cuadrado de un complejo, que se resuelve multiplicándolo por sí mismo y estamos frente a un caso común de producto de complejos. Un ejemplo nos mostrará que no se puede considerar como tema nuevo. Sea la operación:

$$(3 - 2\, j)^2$$

que se resuelve escribiendo la operación indicada por el cuadrado:

$$(3 - 2j)\ (3 - 2j) =$$
$$= 9 - 6j - 6j + 4\, j^2 =$$

donde en lugar del operador j al cuadrado escribimos (-1), o sea cambiamos signo a ese término y tenemos finalmente:

$$5 - 12\, j$$

y como se ve resulta otro complejo sin necesidad de aplicar reglas especiales para resolver la elevación al cuadrado.

109. — División de complejos

El cociente entre dos complejos da por resultado otro complejo tal, que multiplicado por el divisor resulta el dividendo. Si tenemos un cociente cualquiera algebraico, escribimos:

$$\frac{a}{b} = c$$

que es cierto siempre que se cumpla que $b \times c = a$; y eso es lo que afirmamos más arriba.

Para resolver un cociente entre complejos se recurre a un artificio del Algebra, cual es el multiplicar el numerador y el denominador por una misma cantidad, con lo que ese cociente no se altera. En este caso, la cantidad por la cual multiplicaremos al dividendo y al divisor es el complejo conjugado del denominador. Así, si tenemos que dividir los siguientes complejos:

$$\frac{3 + 5\, j}{2 - 4\, j}$$

recurrimos al artificio mencionado multiplicando al numerador y al denominador por el complejo conjugado del denominador, que es:

$$2 + 4\, j$$

y efectuamos las operaciones que resultan. Se tiene:

$$= \frac{(3 + 5\, j)\ (2 + 4\, j)}{(2 - 4\, j)\ (2 + 4\, j)} =$$

Realicemos las operaciones indicadas; en el numerador se tiene:

$$= 6 + 12j + 10j + 20j^2 =$$
$$= 6 + 22j - 20 = -14 + 22j$$

resultado que se obtuvo por el hecho de que sabemos que el cuadrado del operador j es

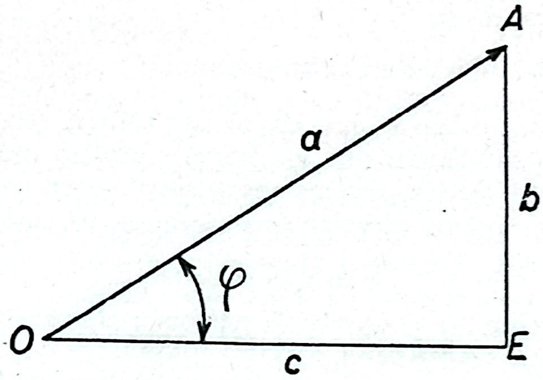


FIG. 73. — Determinación de los valores polares de un complejo.

igual a (— 1). En el denominador tenemos el producto de dos complejos conjugados, que sabemos que da por resultado la suma de cuadrados del término real y el coeficiente del imaginario, o sea:

$$(2 - 4j)\ (2 + 4j) = 4 + 16 = 20$$

Luego reconstruimos la relación indicada al principio, poniendo en lugar del numerador el resultado que obtuvimos y lo mismo para el denominador:

$$= \frac{-14 + 22j}{20} =$$
$$= -0{,}7 + 1{,}1j$$

puesto que no había más que dividir por 20 ambos números del dividendo. Es decir que cuando se deba dividir dos complejos, multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador y hacemos las operaciones indicadas, obteniéndose por resultado otro complejo.

110. — Representación polar de complejos

Retomemos la figura 68 que nos daba la representación vectorial de varios complejos y comparémosla con la figura 74. De inmediato vemos que los cuatro vectores son iguales, están en el mismo sitio, tienen las mismas dimensiones e inclinaciones respecto de los ejes; pero han desaparecido las marcaciones en esos ejes y la escritura algebraica en cada vector que los caracterizaba. Cada vector se indica con una letra y se marca el ángulo que forma con el trozo positivo del eje horizontal. En el extremo de cada vector se escriben dos cifras: una es un número y la otra, dentro de un angulito, es la medida del ángulo mencionado. Esta forma de representar complejos es también vectorial, pero en particular se llama *polar* y se suele usar en la técnica.

Para poder realizar operaciones debemos conocer la equivalencia, la manera de pasar de un sistema al otro sistema. Para ello observemos la figura 73 que nos muestra el triángulo OAE que es el que forma el primer vector de la figura 68 con el eje horizontal. De este triángulo, con ayuda de la Trigonometría, podemos calcular sus elementos; calculemos en primer término la longitud de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras (sección 81):

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

y si observamos las figuras 68 y 73 deduciremos de inmediato que c es la parte real del complejo y que b es el coeficiente de la parte imaginaria. Ahora, en el mismo triángulo, de-

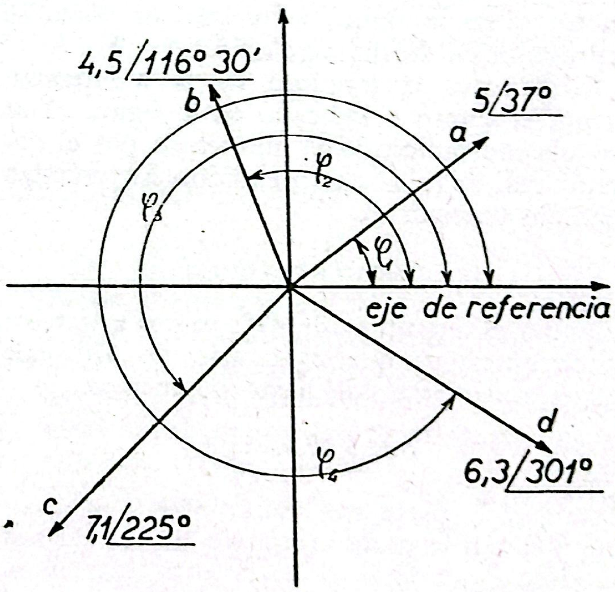


FIG. 74. — Representación polar de complejos.

terminemos la tangente trigonométrica del ángulo en el vértice O; ella vale (sección 80):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{c}$$

Quiere decir que si tenemos un complejo escrito en su forma algebraica, para obtener la representación polar podemos calcular la longitud del vector y el ángulo que él forma con el semieje positivo o de referencia, mediante las expresiones dadas. Veamos cómo se representa el primer vector de la figura 68, el *OA*. La longitud del vector vale:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} =$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

y la tangente del ángulo que forma con el eje de referencia vale:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Para cuya cifra $\varphi_1 = 37°$. Luego el vector polar que representa al complejo *OA* se dibuja tomando ese ángulo de 37° y marcando sobre el vector una longitud de 5 unidades. Del mismo modo procederíamos para los otros vectores de la figura 68 y obtendríamos las longitudes y ángulos que se indican en la figura 74.

Viceversa, si tenemos un vector expresado en la forma polar, podemos pasar a la forma algebraica mediante un procedimiento similar, con ayuda de la Trigonometría. Tomemos el vector *a* de la figura 74 y veamos cómo se representa en forma algebraica.

Conocemos la longitud de la hipotenusa; luego, el cateto *c* indicado en la figura 73 se calcula multiplicando la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido. En nuestro ejemplo tenemos:

$$c = a \cos \varphi$$

y como el ángulo es de 37°, vamos a la tabla y encontramos que el coseno de 37° vale aproximadamente 0,8; luego obtenemos:

$$c = 5 \times 0{,}8 = 4$$

Esta será la parte real del complejo algebraico. Veamos la parte imaginaria de la cual nos interesa determinar el coeficiente, que en la figura 73 es el cateto *b*. Este cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto; operando, y sacando de la tabla el valor del seno de 37° que es aproximadamente 0,6, se tiene:

$$b = a \operatorname{sen} \varphi$$
$$b = 5 \times 0{,}6 = 3$$

y este es el coeficiente de la parte imaginaria, con lo cual nuestro vector se escribe como un complejo algebraico:

$$4 + 3j$$

que coincide con la expresión que aparece en la figura 68 escrita sobre el vector *OA*. Para ángulos mayores de 90° se tendrán en cuenta los signos y demás indicaciones dadas en el capítulo 9.

111. — Uso de radianes

Recordemos que en el capítulo 6 sección 53, estudiamos que los ángulos podían medirse en grados, sistema sexagesimal, o en radianes, sistema circular. Por ejemplo, un ángulo

$$\varphi = 1{,}25 \text{ radianes}$$

aunque no se escriba la palabra *radianes*, quedaría sobreentendida.

En la práctica entonces, podemos establecer la siguiente proporción entre ángulos medidos en grados y radianes:

$$\frac{\varphi°}{\varphi} = \frac{360}{6{,}28}$$

de la cual se deduce fácilmente que el ángulo expresado en grados es igual al ángulo expresado en radianes multiplicado por 360 y dividido por 6,28. Por ejemplo, el ángulo mencionado antes, de 1,25 radianes, será de:

$$\varphi° = \frac{1{,}25 \times 360}{6.28} = 71{,}6° = 71° \, 36'$$

112. — Notación vectorial

Cabe hacer notar que si quisiéramos escribir en forma literal la suma de complejos, refiriéndonos a la operación gráfica o vectorial, no podemos usar los símbolos comunes; por ejemplo, si escribimos:

$$OA + OB$$

queda claro que se trata de la suma de los vectores *OA* y *OB*; pero si escribimos:

$$E + V$$

no podemos saber si queremos expresar la suma vectorial de ellos o la suma aritmética.

La suma vectorial se indica colocando sobre los símbolos de los vectores una rayita, un punto o una flecha; nos quedamos con la rayita y ponemos:

$$\overline{a} + \overline{b}$$

y sabemos que esta última operación indicada es una suma vectorial y no algebraica.

Día 12

Seguramente el lector se ha detenido a meditar después de la jornada pasada, un poco abrumado por los desarrollos de cantidades complejas; y no es que las operaciones que se aprendieron a realizar sean complicadas, pues se trata de ejemplos de aplicación del Algebra, sino que no se ve tan clara la utilidad que prestan las mismas. En temas anteriores, donde aprendimos a resolver ecuaciones, a calcular áreas o volúmenes, a resolver triángulos o a aplicar logaritmos para encontrar resultados de problemas que de otro modo no sabíamos resolver, la utilidad estaba a la vista; las cantidades complejas no parecen ser importantes, pero advertimos que el estudio de los circuitos eléctricos o electrónicos se hace mediante el cálculo vectorial, y éste no es otra cosa que la aplicación gráfica de cantidades complejas. Y como hemos advertido desde el principio de esta obra que su finalidad era la de facilitar al lector la lectura y comprensión de libros técnicos, no podíamos dejar de lado tan importante capítulo de las Matemáticas como es el que acabamos de tratar.

Algo parecido ocurrirá con el tema de la presente jornada; la aplicación práctica de las ecuaciones de segundo grado hay que buscarlas en el estudio de las líneas y superfigie curvas, por ejemplo en el diseño de engranajes, en la catenaria o vientre que forma un cable eléctrico suspendido entre dos postes, en fin, en numerosos problemas de la técnica. Entonces, consideremos nuestro tema de hoy con seriedad y tratemos de asimilarlo totalmente, pues nos conducirá a la correcta interpretación de muchos temas técnicos que de otro modo quedarían leídos simplemente, sin entenderlos. Con tal advertencia podemos comenzar la jornada

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

En los capítulos 4 y 7 nos hemos ocupado de las ecuaciones algebraicas en las cuales teníamos una o más incógnitas, pero siempre las mismas no estaban elevadas a ninguna potencia; entonces, esas ecuaciones eran de primer grado. El grado de una ecuación tiene el mismo orden que el exponente a que aparece elevada la incógnita; así, una ecuación en la cual su incógnita está elevada al cuadrado es de *segundo grado*, si aparece elevada al cubo es de *tercer grado* y así siguiendo. En las Matemáticas elementales se estudian únicamente las ecuaciones de primer grado y eso ya lo hemos hecho. En lo que podríamos llamar Matemáticas general, se estudian las ecuaciones de segundo grado y eso es lo que haremos ahora. Las ecuaciones de grado mayor corresponden a las Matemáticas superiores y entonces su estudio escapa al carácter de este libro.

De acuerdo a lo que sabemos sobre ecuaciones, diremos que una ecuación de segundo grado será aquella que, una vez ordenada, tiene por lo menos un término en el cual la incógnita aparece elevada al cuadrado; los otros términos pueden tener la incógnita sin potencia alguna o no tenerla y son los términos independientes o números puros. Si pasamos todos los términos de la ecuación al primer miembro, nos queda la ecuación ordenada e igualada a cero; su *forma general y completa* es:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

en la cual el primer término se llama *cuadrático*, el segundo *lineal* y el tercero *independiente*.

Otras veces la ecuación de segundo grado se presenta sin el coeficiente del término cuadrá-

1165
4641 5551

trico, y entonces toma el nombre de *forma completa reducida*. Por razones que veremos más adelante, cuando encaremos su resolución, los factores numéricos en este caso se escriben con otras letras que no son a, b y c, sino las que se ven en la ecuación reducida:

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

Y finalmente se presentan a veces en sus formas *incompletas*, es decir cuando faltan el término lineal o el término independiente; ejemplos de los dos casos planteados son, respectivamente:

$$a\,x^2 + c = 0$$
$$a\,x^2 + b\,x = 0$$

Vistas las cuatro formas en que puede presentarse una ecuación de segundo grado, trataremos ahora su resolución, la cual se realiza de diferente manera para cada una de las cuatro formas de presentación. Para estudiar las resoluciones comenzaremos por la forma más simple, que es la incompleta sin término lineal y luego trataremos las otras.

113. — Solución cuando no hay término lineal

La ecuación de segundo grado incompleta por falta del término lineal es de la forma:

$$a\,x^2 + c = 0$$

y para resolverla, es decir, encontrar el valor o los valores de la incógnita x, no hay más que realizar unas sencillas operaciones algebraicas. La primera de éstas es pasar el término independiente al segundo miembro; se tiene:

$$a\,x^2 = -\,c$$

y ahora pasamos el factor a del término cuadrático al segundo miembro, donde llegará como divisor:

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

La solución buscada se encuentra extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, y recordaremos que en álgebra (sección 28) vimos que una raíz cuadrada tenía siempre dos soluciones numéricamente iguales, una positiva y otra negativa; es decir que obtenemos:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Las dos soluciones indicadas por el doble signo delante de la raíz nos dicen que la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, llamadas *raíces*. Para diferenciarlas, pues ambas son valores correctos de la incógnita que satisfacen igualmente a la ecuación, se escribe:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Así que, como primera conclusión, decimos que la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones o raíces, y esto es válido para toda ecuación de este tipo, sea completa o no. La segunda conclusión, aplicable al caso que estamos tratando, es que si los dos valores numéricos dentro de la raíz son positivos, tendremos la raíz de una cantidad negativa, o sea una cantidad imaginaria. Es decir que la ecuación de segundo grado sin término lineal puede tener dos raíces reales o dos raíces imaginarias. Si ponemos algunos ejemplos veremos cuándo ocurre una cosa o la otra.

Ejemplo 1: Sea la ecuación de segundo grado incompleta siguiente:

$$4\,x^2 - 8 = 0$$

y para resolverla podemos hacer el planteo algebraico que desarrollamos durante la explicación, pero es más simple aplicar directamente las fórmulas que nos dan las raíces; se tienen los dos valores:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{-8}{4}} = \sqrt{2} = 1{,}41$$

porque al poner el 8 negativo con el signo negativo del quebrado, pasamos a tener signo positivo. La raíz cuadrada de 2 vale 1,41, obtenida por medio de logaritmos o mediante la regla cuyo uso se explicó en el capítulo 10. La otra raíz vale:

$$x_2 = -\sqrt{2} = -\,1{,}41$$

El haber obtenido las raíces quiere decir que la ecuación ha quedado resuelta; es decir que si reemplazamos el valor de cualquiera de las raíces en la ecuación, la misma debe satisfacerse, o sea quedar igual a cero. Probemos de poner el valor hallado, y da lo mismo una de las raíces que la otra puesto que, al elevarse al cuadrado no importa que su valor sea positivo o negativo, ya que el cuadrado será siem-

pre positivo; al reemplazar tenemos:

$$4\,(1{,}41)^2 - 8 = 0$$
$$4 \times 2 - 8 = 0$$

que se cumple, pues 1,41 al cuadrado vale 2, ya que lo obtuvimos sacando la raíz de 2. De modo que las raíces satisfacen la ecuación.

Ejemplo 2: Sea la ecuación de segundo grado incompleta siguiente:

$$4\,x^2 + 16 = 0$$

y vemos que los dos términos son positivos, por lo que sabemos que las raíces serán imaginarias. Calculemos:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{16}{4}} = \sqrt{-4} = 2\,j$$

$$x_2 = -\sqrt{-4} = -2\,j$$

y se produjo lo que sabíamos, habiéndose extraído la raíz del número 4 como real, pero afectando el resultado con el operador j, según lo estudiado en el capítulo 11. Esa ecuación puesta como ejemplo no da resultados reales, es decir que corresponde a un planteo matemático que responde a las cantidades complejas o vectoriales.

114. — Solución cuando no hay término independiente

La segunda forma de ecuación incompleta de segundo grado que trataremos es cuando falta el término numérico o independiente. Es decir que tendremos la ecuación en la forma:

$$a\,x^2 + b\,x = 0$$

Para resolver la ecuación encontrada en esta forma, hacemos un pequeño artificio algebraico, sacando factor común x, es decir que dividimos ambos términos por x y a esta letra la colocamos fuera de un paréntesis. El primer término dividido por x nos da ax y el segundo nos da b; es decir que obtenemos:

$$x\,(a\,x + b) = 0$$

y para que el producto de dos cantidades sea cero, debe serlo una de ellas. Quiere decir que igualando a cero la x tenemos una de las raíces de la ecuación e igualando el paréntesis a cero tenemos la otra raíz. Operemos:

$$x_1 = 0$$

esta es una de las raíces o resultados de la ecuación dada. Obtengamos la otra:

$$a\,x + b = 0$$

de cuya expresión podemos despejar el valor de x, que será en realidad x_2 ya que es el valor de la otra raíz; para tal fin pasamos la b al segundo miembro con signo negativo y pasamos el factor a como divisor, teniéndose:

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Nos ha resultado que la ecuación de segundo grado incompleta por falta del término independiente tiene siempre una raíz igual a cero y la otra igual al cociente, con signo cambiado, entre el coeficiente del término lineal y el del término cuadrático. Siempre el resultado da cantidades reales.

Ejemplo: Se tiene la siguiente ecuación incompleta de segundo grado:

$$5\,x^2 - 8\,x = 0$$

de la cual queremos conocer las dos raíces o soluciones. Una de ellas es nula siempre, es decir:

$$x_1 = 0$$

y la otra se calcula con la fórmula dada; como el coeficiente del término lineal es negativo, al reemplazarlo en la fórmula da una cantidad positiva:

$$x_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Si reemplazamos cualquiera de las raíces en la ecuación dada deben satisfacerla, es decir igualarla a cero. En efecto, colocando en lugar de x el valor cero, la ecuación se reduce a $0 - 0 = 0$; colocando el otro valor:

$$5\,(1{,}6)^2 - 8\,(1{,}6) =$$
$$5 \times 2{,}56 - 8 \times 1{,}6 =$$
$$12{,}8 - 12{,}8 = 0$$

también la satisface, es decir que las raíces son correctas.

115. — Solución para la forma completa reducida

Ahora tratemos el caso de que la ecuación de segundo grado sea completa, es decir que tenga los tres términos, pero el término cuadrático no tiene coeficiente numérico. Esa

forma la habíamos escrito:

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

Para resolverla hay que hacer un planteo matemático; primero, pasemos el término independiente al segundo miembro, que lo hará con signo negativo:

$$x^2 + p\,x = -q$$

y ahora, como artificio matemático, sumemos a los dos miembros una misma cantidad, con lo que la ecuación no se altera; esa cantidad es:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

la que sumada en ambos miembros nos da:

$$x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad (A)$$

Para seguir adelante debemos recordar algo visto en la sección 36, referente al cuadrado de binomios. Tomemos el binomio siguiente:

$$x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad (B)$$

y desarrollemos su cuadrado en la forma explicada en aquella oportunidad; da igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término; o sea:

$$= x^2 + 2\,x\,\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

que simplificando el factor y el divisor 2 del segundo término nos queda:

$$x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

es decir que queda precisamente todo el primer miembro de la ecuación (A); luego, en lugar de ese primer miembro podemos escribir la expresión (B) y dejamos el segundo miembro que teníamos:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Y ahora, extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, el primero queda sin el cuadrado y el segundo queda con la raíz cuadrada, a la cual debemos poner el doble signo, pues una raíz cuadrada tiene dos raíces, según ya sabemos. Obtenemos:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

y bastará pasar el segundo término del primer miembro al segundo miembro, con signo cambiado, para obtener el valor de la incógnita:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Que, como hay un doble signo, sabemos que habrá dos raíces, cuyos valores son:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

satisfaciendo a la ecuación cualquiera de ellos.

Como aclaración importante, si el segundo término dentro de la raíz, o sea el término independiente, es positivo y mayor que el primer término, la raíz quedará con una cantidad subradical negativa y se tendrán resultados imaginarios; como los valores finales tienen una cantidad real sumada o restada a esos valores imaginarios, obtendremos dos cantidades complejas. Es decir que la forma reducida de la ecuación de segundo grado puede dar raíces reales o complejas, según los valores numéricos de sus coeficientes. Para tener resultados reales la cantidad subradical debe resultar positiva, después de haber hecho las operaciones indicadas.

Ejemplo 1: Sea la ecuación de segundo grado completa en forma reducida:

$$x^2 - 4\,x - 5 = 0$$

y obtengamos los valores de las raíces, según las fórmulas que las resuelven; en la ecuación dada p vale -4 y q vale -5; reemplazando se tiene:

$$x_1 = 2 + \sqrt{4+5} =$$
$$x_1 = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$$

Ejemplo 2: Veamos otro ejemplo en el cual no resulten raíces reales sino complejas. Sea la ecuación completa reducida:

$$x^2 + 6\,x + 18 = 0$$

y obtendremos los valores de las dos raíces aplicando directamente las fórmulas ya cono-

cidas; se tiene:

$$x_1 = -3 + \sqrt{9 - 18}$$
$$= -3 + \sqrt{-9}$$
$$= -3 + 3j$$
$$x_2 = -3 - 3j$$

que resultan cantidades complejas, porque la raíz cuadrada de —9 es igual a la cantidad real 3 multiplicada por el operador j que es la raíz de —1.

116. — Solución para la forma completa general

Hemos dejado para el final la forma general y completa por razones de simplicidad mayor de los otros casos. Recordemos la expresión general de la ecuación de segundo grado:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

y veamos lo que ocurre si dividimos toda la ecuación por a, coeficiente del término cuadrático; tendremos:

$$\frac{a x^2}{a} + \frac{b x}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

y podemos simplificar de inmediato el primer término, en el cual desaparece a por estar en el numerador y en el denominador, y el segundo miembro, que queda reducido a cero; se tiene:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

y si al coeficiente del término lineal lo llamamos p y al término independiente lo llamamos q, nos queda la ecuación reducida que ya hemos tratado; es decir que poniendo:

$$p = \frac{b}{a}$$

$$q = \frac{c}{a}$$

la ecuación adquiere la forma:

$$x^2 + p x + q = 0$$

y entonces las raíces se calculan con la fórmula ya vista:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

en cuya fórmula podemos poner, en lugar de p y q, los equivalentes dados más arriba, y se tendrá:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

que para ser simplificada requiere unos arreglos matemáticos. Como primer paso, resolvemos el cuadrado del primer término dentro de la raíz y luego multiplicamos numerador y denominador del segundo término dentro de la raíz por $4a$ para que tenga igual denominador que el primero; se tiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$$

y tenemos dentro de la raíz la resta de dos quebrados de igual denominador, de modo que se restan los numeradores y se coloca el denominador común; y como nos queda la raíz de un cociente, es lo mismo escribir la raíz del numerador dividido por la raíz del denominador; tenemos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Donde podemos observar que la raíz que aparece en el denominador del segundo término es un cuadrado perfecto, con resultado $2a$, cantidad igual al denominador del primer término. Tenemos así otra vez una operación de quebrados con igual denominador, de modo que ponemos el denominador común y en el numerador queda la operación indicada con el doble signo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en cuya fórmula final tomaremos el signo positivo para calcular la raíz x_1 y el signo negativo para la raíz x_2. En un ejemplo veremos cómo se aplica la fórmula encontrada.

Ejemplo: Se tiene la ecuación general completa siguiente, de la cual se desean conocer las raíces:

$$2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$$

y sabemos que las raíces serán dos, debiendo ambas satisfacer la ecuación. La primera vale, teniendo en cuenta que $a = 2$, $b = -6$ y $c = -3{,}5$:

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{6^2 + 4 \times 2 \times 3{,}5}}{2 \times 2}$$

expresión en la cual haciendo operaciones aritméticas se tiene:

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 + 28}}{4} =$$

$$x_1 = \frac{6 + 8}{4} = 3,5$$

que resultó casualmente de igual valor numérico que el término independiente. La segunda raíz vale:

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{64}}{4} = \frac{6 - 8}{4} =$$

$$x_2 = \frac{-2}{4} = -0,5$$

Y si reemplazamos cualquiera de estas dos raíces en la ecuación propuesta, deben satisfacerla, es decir, reducirla a cero. Veamos los dos reemplazos:

para x_1 $2 \times 3,5^2 - 6 \times 3,5 - 3,5 = 0$

para x_2 $2 \times (-0,5)^2 + 6 \times 0,5 - 3,5 = 0$

identidades aritméticas que puede demostrar el lector con sólo hacer las operaciones indicadas, y recordando las reglas de los signos.

117. — Caso de soluciones complejas

La fórmula final hallada para calcular las raíces o soluciones para la ecuación general y completa de segundo grado nos permite analizar de antemano cuándo las raíces serán reales y cuándo serán cantidades complejas. En el ejemplo propuesto resultaron reales, pero no siempre ocurre así; habiendo una raíz cuadrada en la fórmula que da las raíces, podemos analizar las condiciones para que esa raíz dé resultados reales de la operación o no los dé.

Para que una raíz cuadrada dé un resultado real, la cantidad subradical debe ser una cantidad positiva; podemos escribir:

$$b^2 - 4\,a\,c = \text{positiva}$$

y en caso contrario el resultado será una cantidad imaginaria y las soluciones de la ecuación serán cantidades complejas. El primer término de la expresión anterior es siempre positivo, cualquiera que sea el signo de b en la ecuación general, por estar elevado al cuadrado; el segundo término puede ser positivo o negativo, según los signos de a y c en la ecuación. Si uno de los dos es negativo, no hay problema, pues el signo del segundo término dentro de la raíz pasa a ser positivo y en vez de suma tenemos una resta. La segunda posibilidad es que siendo a y c positivos, con lo que se mantiene el signo de la resta, el término entero $4ac$ que debe restarse, sea menor que el primer término, o sea que se tenga:

$$4\,a\,c < b^2$$

y la raíz dará un resultado real, porque al restar una cantidad menor quedará un saldo positivo. La tercera posibilidad es que la condición última se invierta, o sea que:

$$4\,a\,c > b^2$$

y entonces quedará un saldo negativo de la resta y el resultado de la raíz será una cantidad imaginaria. El caso de que ambos términos sean iguales, con lo que la raíz se anula, puede englobarse entre los casos de resultados reales. En un ejemplo veremos el caso tercero, que es el interesante.

Ejemplo: Se tiene una ecuación de segundo grado general y completa:

$$2\,x^2 + 4\,x + 4 = 0$$

Y deseamos saber si las raíces serán reales o complejas. Planteamos la condición que lo determina, sabiendo que $a = 2$, $b = 4$ y $c = 4$; luego:

$$b^2 = 16$$
$$4\,a\,c = 32$$

y se ve enseguida que 32 es mayor que 16, luego las raíces serán complejas. Hallemos esas raíces:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{4}$$

$$x = \frac{-4 \pm j\sqrt{16}}{4}$$

$$x_1 = -1 + 4\,j$$

$$x_2 = -1 - 4\,j$$

Donde para hacer las operaciones hemos dividido por 4 los dos términos del numerador y hemos tomado el signo positivo para la primera raíz y el negativo para la segunda. Las dos resultaron cantidades complejas.

118. — Reconstrucción de la ecuación

En la práctica se presenta muchas veces el caso particular de que no se tiene la ecuación de segundo grado pero se conocen sus raíces. Mediante los valores de las mismas es posible reconstruir la ecuación, y tomaremos la forma general reducida por ser la más cómoda. Veamos cuánto valen la suma y el producto de las dos raíces; para ello escribimos sus valores:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

y hemos puesto la raya debajo de las fórmulas que dan los valores de las dos raíces a los efectos de hacer primero la suma de ellas y luego el producto. Comencemos por la suma, en la que vemos que la raíz aparece una vez con signo positivo y otra con signo negativo, luego, al sumar, se anula; se tiene:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -\frac{2p}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

Quiere decir que la suma de las raíces da el coeficiente del término lineal con signo cambiado. Veamos el producto:

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

$$\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

Y tenemos el producto de la suma por la diferencia de un binomio, que según vimos en la sección 37, es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos del binomio, o sea:

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

y vemos que se anula el término $p/2$ por estar dos veces con distinto signo; en efecto la primera vez es negativo y elevado al cuadrado queda positivo, la segunda es negativo; nos queda finalmente:

$$x_1 x_2 = q$$

o sea que el producto de las dos raíces es igual al término independiente.

Ejemplo: Se desea reconstruir una ecuación de segundo grado en la cual las raíces valen 3 y 5; tenemos, aplicando lo último que estudiamos:

$$x_1 + x_2 = -p = 3 + 5 = 8$$

$$\text{luego } p = -8$$

$$x_1 x_2 = q = 5 \times 3 = 15$$

con lo que la ecuación general reducida la escribimos así:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

y queda resuelto el problema planteado.

119. — Formas no comunes de la ecuación

A veces la ecuación de segundo grado no se presenta en alguna de las formas que vimos al principio de este capítulo y puede dudarse sobre si es o no una ecuación del tipo estudiado. Unos ejemplos nos aclararán el planteo:

Ejemplo 1: Se tiene la siguiente ecuación, que no parece de segundo grado por no tener términos en el cuadrado de la incógnita:

$$x + \frac{m}{x} = n$$

Es decir que aparecen términos en x sin potencia alguna. Pero para ordenarla debemos multiplicar a toda la ecuación por x y entonces tenemos:

$$x^2 + m = n\,x$$

y pasando todos los términos al primer miembro:

$$x^2 - n\,x + m = 0$$

y vemos que es una ecuación de segundo grado, completa, en forma reducida.

Ejemplo 2: Se tiene una ecuación en la cual la incógnita aparece en los denominadores de los términos:

$$\frac{m}{x^2} + \frac{n}{x} = r$$

y si multiplicamos por x^2 toda la ecuación:

$$m + n\,x = r\,x^2$$

Con lo que la ecuación adquirió la forma conocida.

Día 13

Habíamos prometido que los últimos cinco días de nuestro curso sintético iban a ser muy interesantes y el lector habrá comprobado que los dos ya transcurridos de esta última serie nos han permitido abordar temas muy importantes para nuestro objetivo. En efecto, las cantidades complejas y las ecuaciones de segundo grado se emplean en muchas técnicas y sus fórmulas aparecen frecuentemente en los libros que tratan esas materias. Ahora abordaremos una tercera jornada de tanto o de mayor interés que las mencionadas; se trata del estudio de la Geometría Analítica, es decir de la forma de representar figuras mediante ecuaciones algebraicas. Puede decirse que una ecuación nos representa una línea recta o curva, una figura cerrada, un cuerpo en el espacio y veremos que eso es perfectamente posible. Claro está que para poder encarar este tema es menester haber estudiado las ecuaciones algebraicas y por eso nos ocupamos de ellas oportunamente. Habiendo limitado el presente libro a las necesidades de las materias técnicas y a la interpretación de las fórmulas que aparecen en los libros técnicos, también limitaremos el presente capítulo a los temas que pueden ser explicados y entendidos con los conocimientos básicos desarrollados en las páginas precedentes. Así, veremos las ecuaciones de las rectas, de la circunferencia y otras figuras cerradas o no que se obtienen cortando un cilindro o un cono con un plano y algunos pocos temas más, sin entrar en los cuerpos en el espacio, cuyo estudio dentro de esta modalidad corresponde a los cursos de Matemáticas superiores. El lector no lamentará la limitación, pues con ella nos colocamos dentro de las posibilidades de interpretación inmediata y lo aprendido le resultará suficiente para leer y entender una gran mayoría de libros técnicos.

GEOMETRIA ANALITICA

Esta rama de las Matemáticas estudia la representación algebraica de figuras geométricas o la vinculación entre tales figuras y sus correspondientes expresiones literales. Es decir que si tenemos una ecuación, sabremos que la misma corresponde a una línea recta referida a un sistema de ejes cartesianos, o a una circunferencia, o a otra curva regular cualquiera. Si tenemos dos ecuaciones, los valores de las incógnitas que coinciden en ambas son puntos comunes de ambas figuras geométricas, es decir puntos de encuentro, puntos en los que se cortan. Y esto nos dice que tendremos siempre vinculados una ecuación y un sistema gráfico referido a un par de ejes coordenados. La Geometría analítica del espacio, que estudia el mismo problema para los cuerpos sólidos o figuras con tres dimensiones, necesita un sistema de tres ejes coordenados, tema que mencionamos pero que no estudiaremos por escapar a nuestro objetivo.

Luego, un sistema de ejes coordenados en el plano y una ecuación que puede ser representada o dibujada en ese sistema, nos llevan a la necesidad de tratar ecuaciones con dos incógnitas, ya que los ejes son dos y sobre cada uno de ellos debemos tomar medidas. Los principios de la representación gráfica han sido estudiados en el capítulo 6 sección 59 y conviene darles un vistazo de revisión, pues necesitaremos esos conceptos constantemente. Llegamos así a la necesidad de definir la *función* matemática, como la dependencia que hay entre una cantidad relacionada con otra y esta última.

120. — Concepto de función

Las cantidades o valores numéricos que encontramos en la técnica pueden ser fijos, inmutables, constantes; o variables, dependientes de alguna variación, alterables según una ley, etc. Podemos entonces asignar a las cantidades dos categorías: *constantes* y *variables*. Son constantes por ejemplo, la altura de una puerta, la distancia entre dos ciudades, la superficie de un cuadrado cuyo lado está dado; son variables la velocidad de un móvil, el área de una figura cuyos lados no son fijos, el flujo de una corriente líquida, etc. En Matemáticas las constantes se representan con las primeras letras del alfabeto, a, b, c, etc., y las variables con las últimas letras, x, y, z, etc.

Muchas veces la variabilidad de una cantidad está sometida a las variaciones de otra, es decir que hay dos cantidades variables, pero una depende de la otra; si esta segunda toma un valor fijo la primera también lo será. Por ejemplo, la longitud de una circunferencia depende de la longitud del radio y mientras el radio varíe, variará aquella longitud; fijando un radio dado la circunferencia adquiere una longitud fija y determinada.

Cuando una cantidad variable depende de otra también variable, la primera se llama *función* y la segunda *variable independiente;* así, si tenemos una expresión como ésta:

$$y = 2\,x^2 - 3\,x$$

diremos que los valores de y dependen exclusivamente de los valores que tome x, por lo que x es la variable independiente e y es la función. En forma general se puede escribir:

$$y = f\,(x)$$

expresión matemática generalizada que se lee: y es *función* de x. Conociendo la ecuación matemática completa se puede determinar el valor de y que corresponde a cada valor de x.

121. — Representación de funciones

Supongamos que se quiera utilizar un diagrama cartesiano para representar una función, o una ecuación cualquiera. Sabemos que una ecuación algebraica tendrá una o más incógnitas o cantidades desconocidas. Pero hay una relación determinada entre unas y otras. Por ejemplo, sea la función:

$$y = 5\,x$$

Que se lee: y es igual a cinco equis. Quiere decir que cualquiera que sea el valor de x, el de y vale 5 veces más. Eso se puede representar en un gráfico de coordenadas, para lo cual basta tomar una escala para las abscisas, otra para las ordenadas y dibujar dos ejes cartesianos (ver figura 75).

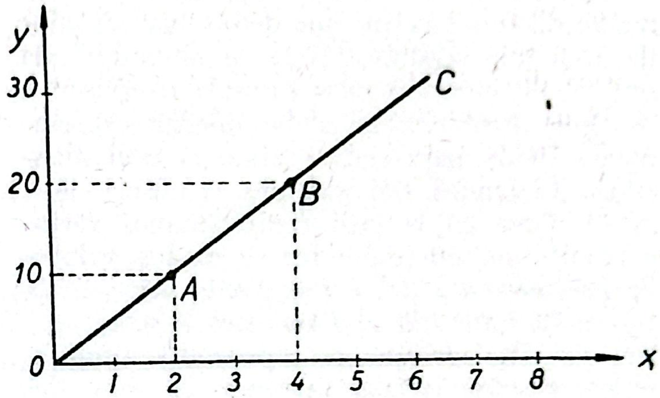


Fig. 75. — Representación gráfica de una línea recta.

Tomamos la cantidad variable x en el eje de abscisas, marcando las unidades y calculamos varios valores de y, que se tienen para respectivos valores de x. Así, por ejemplo, para:

$$x = 2 \qquad y = 10$$
$$x = 4 \qquad y = 20$$

Y así sucesivamente. Tomamos por el punto $x = 2$ una vertical, y por el punto $y = 10$ una horizontal, y ambas rectas se encuentran en el punto A. Tomamos ahora por el punto $x = 4$ otra vertical y por el $y = 20$ otra horizontal, que se encuentran en el punto B. Siguiendo en esta forma se obtendrá una serie de puntos, que están todos en una recta OC, según se ve en la figura. La representación gráfica de la ecuación propuesta es una línea recta.

Por este procedimiento se representa cualquier ecuación o función mediante sucesivos puntos, que estarán alineados en una recta, en una curva o en cualquier otra figura geométrica.

122. — Familias de características

En muchas aplicaciones de la técnica se presenta el caso de que una serie de gráficos están relacionados entre sí según una ley determinada que hace que todos ellos pertenezcan a una misma familia.

Si por ejemplo, en el caso de la figura 75, en lugar de tener una función:

$$y = 5\,x$$

Se hubiera tenido una de la forma:

$$y = a\,x$$

Es evidente que para representar gráficamente tal función hay que determinar el valor de a, y que según sea éste se obtendrá una gráfica distinta. En tales casos la magnitud a se llama *parámetro* y debe quedar expresamente fijado para cada gráfico al cual identifica. Tomemos, por ejemplo, la misma figura 75, pero en la cual représentamos varios gráficos que corresponden a sendos valores de parámetros a, tal como puede verse en la figura 76. Para a igual 5 tenemos la recta central ya dibujada que se representó anteriormente y sobre la cual anotamos tal valor del parámetro.

Supongamos ahora que damos a a otro valor, por ejemplo:

$$a = 2$$

Con el cual pueden determinarse los valores que adquiere la función y cuando se le asignan valores a x, es decir:

Para $x = 2$ $\quad y = 4$
Para $x = 4$ $\quad y = 8$

Y así siguiendo pueden determinarse todos los valores que se deseen.

Para llevar al gráfico la representación de esta nueva serie de valores tomemos como antes para la abscisa, $x = 2$ y la ordenada $y = 4$, obteniéndose el punto C. Asimismo para $x = 4$, $y = 8$ que dan el punto D, por los cuales conjuntamente con el origen O permiten trazar la nueva recta a la cual se coloca el valor de $a = 2$ que tomó el parámetro. Es evidente que la recta debe pasar por el origen O, puesto que si damos en la ecuación a x el valor cero resulta para y también el mismo valor cero.

Si tomáramos ahora otro valor distinto para el parámetro, se obtendría una tercera recta, que también pasa por el origen, puesto que cualquiera sea el valor de a, al tomar x el valor cero, resulta $y = 0$. Tomemos, por ejemplo:

$$a = 10$$

Y dando valores a x se obtiene:

$x = 2$ $\quad y = 20$
$x = 3$ $\quad y = 30$

Donde hemos tomado otros valores para x a fin de poner en evidencia que no es obligatorio adoptar siempre los mismos. Llevando al gráfico los dos pares de valores anteriores

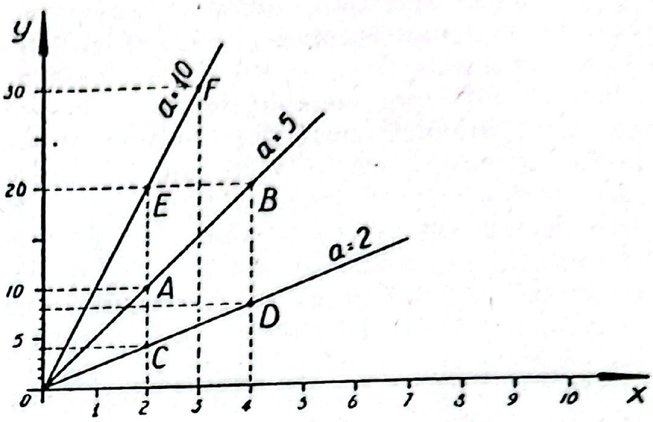


Fig. 76. — Representación gráfica de varias rectas, con intervención de un parámetro.

se obtienen los puntos E y F que están sobre la recta OF en la cual indicamos el valor correspondiente del parámetro.

123. — Desplazamiento de los ejes

En la representación gráfica de funciones muchas veces resulta de conveniencia referir la figura a otros ejes, ubicados en otro lugar del plano, porque ellos pasan por puntos estratégicos y simplifican las operaciones posteriores. Por ejemplo, más adelante veremos que una circunferencia se puede referir a dos ejes coordenados que pasan o no por su centro; es evidente que si pudiésemos elegir los que pasan por el centro de la circunferencia, el problema se simplifica. Para trasladar un sistema de ejes sobre un plano siempre podemos corrernos primero en forma paralela y luego girarlos, es decir que un par de ejes como los xy de la figura 79 puede ser llevado a la posición $x'y'$ mediante dos movimientos: primero una traslación paralela de 4 unidades para x y de 2 unidades para y, en este caso particular y luego rotamos del ángulo α dado, adquiriendo el par de ejes su nueva posición.

Lo que nos interesa entonces es saber cómo transformamos las coordenadas que dan la posición de un punto en el sistema de ejes, al haber desplazamiento de los mismos. Claro, cada punto está dado por dos dimensiones, la abscisa y la ordenada, y al moverse los ejes se alteran esos valores. Veamos la magnitud de

la alteración para un punto A indicado en la figura 77.

Los ejes x' e y' han sido desplazados paralelamente a la posición primitiva dada por el centro O y ocupan una nueva posición, con centro O'. Esos desplazamientos son: el eje x pasó a x' habiéndose desplazado de una magnitud n y el eje y pasó a y' habiéndose desplazado de una magnitud m. El punto A u otro cualquiera, tenía como coordenadas la abscisa x y la ordenada y y ahora tiene las x' e y'. ¿Cómo se pasa de unos a otros valores?

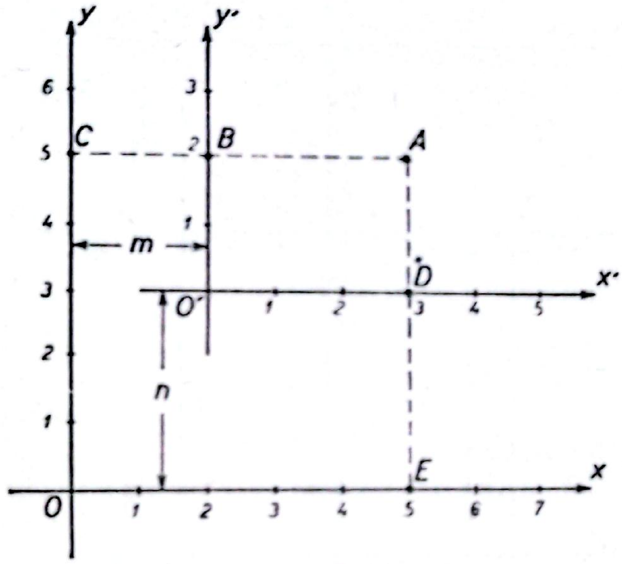


Fig. 77. – Desplazamiento paralelo de los ejes coordenados.

Muy simplemente, pues en la figura 77 vemos que:

$$x = AB + BC = x' + m$$
$$y = AD + DE = y' + n$$

Luego, en cualquier ecuación donde aparezcan las coordenadas x e y colocamos los valores anteriores y hemos hecho intervenir a las nuevas coordenadas.

Veamos ahora el segundo caso, de rotación de ejes, ilustrado en la figura 78. El par de ejes cartesianos x e y sufre una rotación dada por el ángulo α. El centro O se mantiene en su lugar. Debemos encontrar la relación existente entre las coordenadas primitivas y las nuevas, para reemplazar sus valores en las ecuaciones en que aparecen. Para ello tracemos las rectas auxiliares BD y BE y fijemos que siendo AB perpendicular a OB y AF perpendicular a OF los dos ángulos marcados con la letra α en la figura son iguales. De acuerdo con esto y con la Trigonometría

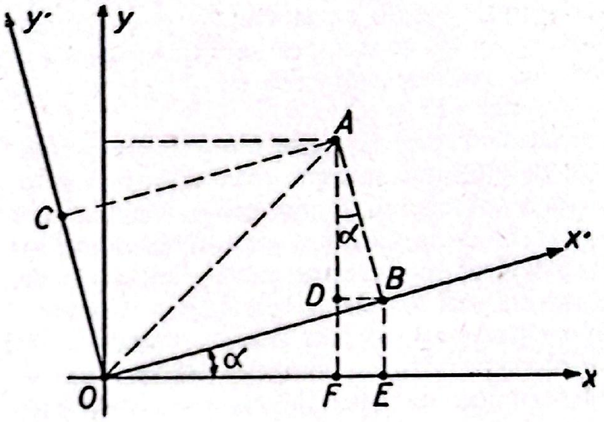


Fig. 78. – Rotación de los ejes coordenados.

(sección 80), podemos escribir los valores de las coordenadas primitivas en la siguiente forma:

$$x = OE - FE$$

pero

$$OE = OB \cos \alpha = x' \cos \alpha$$
$$FE = DB = AB \operatorname{sen} \alpha = y' \operatorname{sen} \alpha$$

con lo que se tiene:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

y para la ordenada:

$$y = FD + DA$$

pero

$$FD = EB = OB \operatorname{sen} \alpha = x' \operatorname{sen} \alpha$$
$$DA = AB \cos \alpha = y' \cos \alpha$$

con lo que se tiene:

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha \qquad (2)$$

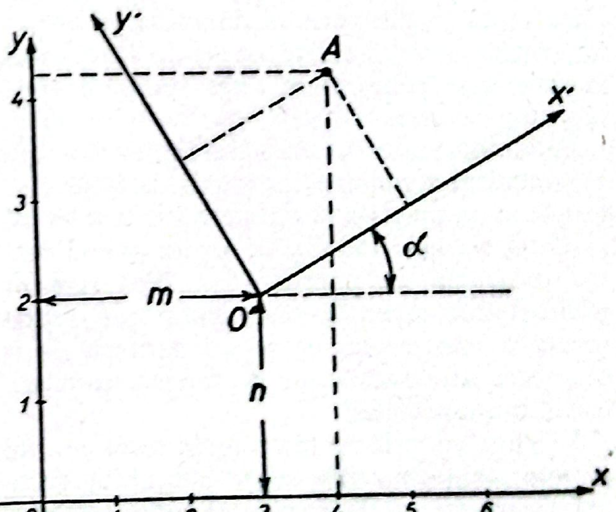


Fig. 79. – Desplazamiento paralelo y rotación de los ejes.

Y conocido el ángulo se obtienen sus funciones seno y coseno en la tabla y puede reemplazarse en las ecuaciones los valores de x e y por sus valores equivalentes, dados por las ecuaciones (1) y (2).

El caso mixto, de traslación paralela y rotación de ejes, que se representa en la figura 79, es el más general, como hemos dicho, pues dos sistemas de ejes que ocupan diferente lugar en el plano siempre pueden superponerse haciendo una traslación paralela y una rotación. Para pasar de un sistema y valores de coordenadas al otro, no hay más que aplicar las fórmulas de equivalencia ya vistas, pero combinando ambas equivalencias, la de rotación y la de traslación. Las coordenadas primitivas resultan así dadas en función de las nuevas y de los valores de los segmentos de traslación y del ángulo de rotación, por las expresiones:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha + m$$
$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha + n$$

que no necesitan demostración pues son evidentes.

124. — Representación y ecuación de la línea recta

Una línea recta en el plano puede referirse a un par de ejes coordenados de tal modo que cada uno de sus puntos quede fijado por su abscisa y su ordenada; si éstas se expresan en forma genérica, llegaremos a una ecuación con dos incógnitas que será precisamente la de la recta en cuestión. Debemos entonces obtener una ecuación que represente una línea recta y que permita dibujarla en el plano, determinar las coordenadas de sus puntos, situarla con respecto a otras rectas o figuras, etc.

Para comenzar, veamos la figura 80, que nos muestra algunos casos particulares de rectas: la m es paralela al eje vertical, la n es paralela al eje horizontal y la o pasa por el centro u origen de coordenadas. Nos será de utilidad encontrar la ecuaciones que representan a estas rectas como un anticipo de la que sirva para rectas que no tengan peculiaridades tan especiales.

Veamos en primer término la recta m. Sus puntos están alineados sobre una recta vertical, de modo que la abscisa de todos sus puntos es una cantidad constante; en el caso de la figura la constante vale 3, pero en general puede tener un valor cualquiera que llamaremos k, letra con que suele designarse a las cantidades constantes; entonces, si escribimos:

$$x = k$$

tenemos una ecuación que nos dice que la abscisa es constante, o sea que la anterior será la ecuación que representa a una recta paralela al eje de ordenadas. Si k es negativo, la recta estará ubicada a la izquierda del punto O.

Considerando ahora la recta n, ella es paralela al eje de abscisas, luego todos sus puntos tienen la misma ordenada, que en la figura 80 vale 4, pero que en general tendrá un valor constante que denominaremos k; el valor de esta k no tiene forzosamente que ser igual al mencionado para la recta m. Luego la ecuación de la recta n será:

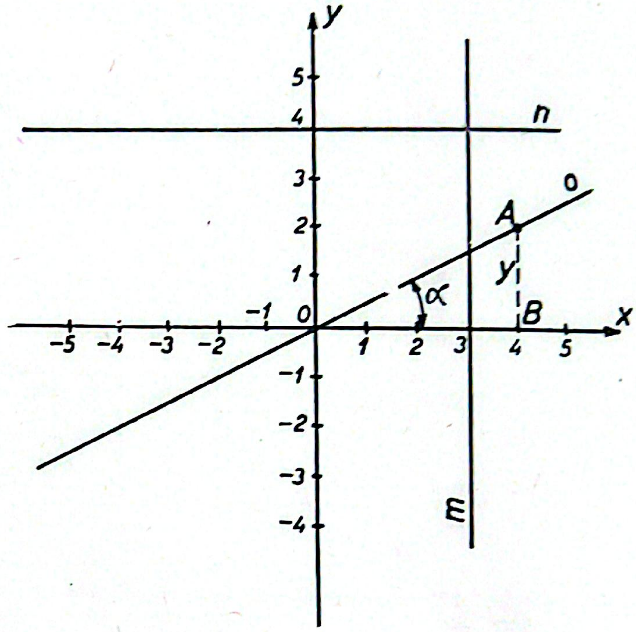


FIG. 80. — Representación de algunas rectas especiales en el plano.

$$y = k$$

y entendemos que k es una constante de valor cualquiera. Si k es un número negativo, la recta estará ubicada por debajo del punto O, en la región de las ordenadas negativas.

Y ahora consideremos el caso de la tercera recta que aparece en la figura 80, que es la o, cuya particularidad es el pasar por el origen O de coordenadas o punto de intersección de los ejes cartesianos. Tomemos sobre la recta uno cualquiera de sus puntos, como el A. Se forma un triángulo OAB en el cual OB es la abscisa del punto A y AB es la ordenada del mismo punto. Por Trigonometría (sección

80) sabemos que la tangente del ángulo indicado vale:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Luego, como la tangente trigonométrica de un ángulo dado es una cifra fija que se encuentra en la tabla de funciones circulares, un valor numérico, podemos asignarle una letra p que representa una cantidad conocida, y entonces la expresión anterior resulta:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \, x$$

o sea:

$$y = p\,x$$

Que será la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas. Si en la ecuación aparece un coeficiente p negativo, ello

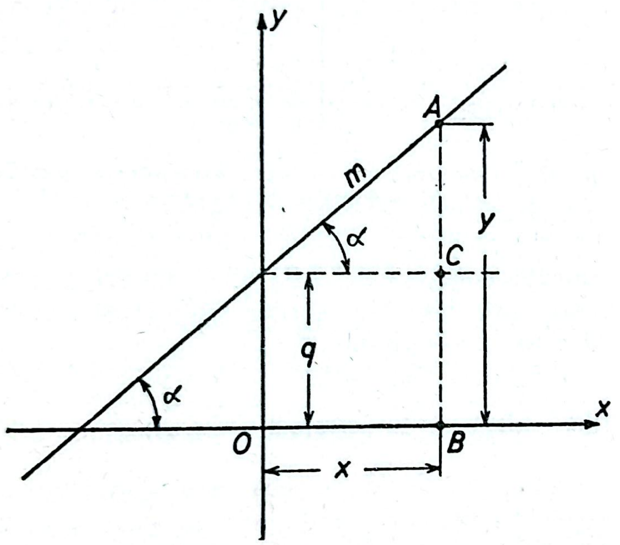


Fig. 81. — Representación de una recta cualquiera.

corresponderá a un valor negativo de la tangente del ángulo, es decir a un ángulo mayor de 90°, de acuerdo a lo que se estudió en el capítulo 9, sección 79.

Y finalmente, debemos considerar el caso general de una recta que no sea paralela a ninguno de los dos ejes y que no pase por el origen O. La figura 81 nos muestra una recta cualquiera, la m. Veamos cómo es la ecuación que la representa, que se llamará *ecuación general de la recta.*

Para deducirla, tomemos sobre tal recta un punto cualquiera tal como el A. La abscisa de ese punto es x y la ordenada es y. Expresaremos el valor de la ordenada del punto en función de la abscisa y de valores fijos y conocidos. Podemos ver en la figura que:

$$y = AC + CB$$

pero la primera parte del segundo miembro equivale al segmento AB de la figura 80, o sea que su valor es:

$$AC = p\,x$$

en cuya expresión sabemos que el coeficiente p es el valor de la tangente del ángulo α, que se llama *coeficiente angular* de la recta. La segunda parte de la expresión, la parte CB, es el segmento q que representa la ordenada del punto en que la recta corta al eje de ordenadas, segmento que se llama *ordenada al origen.* Luego recomponemos la ecuación que da y y se tiene:

$$y = p\,x + q \qquad \text{(A)}$$

Y la precedente sería la ecuación general buscada, sólo que no es común que las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aparezcan en esa forma, sino que suelen aparecer en la forma general algebraica:

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad \text{(B)}$$

Y decimos que esta ecuación representa a una línea recta. En efecto, si la dividimos por el coeficiente del segundo término nos queda:

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$$

y si ahora despejamos el valor de y pasando los demás términos al segundo miembro obtenemos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad \text{(C)}$$

Nos ha resultado una ecuación que da el valor de la ordenada y que es similar a la anterior (A). Luego, las expresiones (A) y (C) son equivalentes y ambas representan a una línea recta; es más, podemos deducir de inmediato, observando ambas expresiones, que el coeficiente de la x es el valor de la tangente del ángulo α, o coeficiente angular y que el término independiente es la ordenada al origen. O sea:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b} = p$$

$$-\frac{c}{b} = q$$

Y entonces podemos decir que la ecuación general de primer grado con dos incógnitas, como la (B), es la ecuación de una recta. De la misma, y en virtud de las dos últimas equivalencias escritas, podemos deducir los valo-

res del coeficiente angular y de la ordenada al origen, mediante cuyas cifras podemos dibujar la recta en el plano, referida a un sistema cartesiano de ejes.

125. — Representación de la recta mediante las coordenadas al origen

Hemos visto que de la ecuación general de la recta podemos obtener dos cifras que permiten su representación gráfica. Una de ellas es el coeficiente angular o sea la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas. Para evitar la consulta a la tabla de funciones circulares, puede representarse la recta mediante el conocimiento de sus dos coordenadas al origen en la forma como se muestra en la figura 82.

La ordenada al origen, cuyo valor denominamos q, nos es conocida, y debemos determinar el valor de la *abscisa al origen*, que en la figura llamamos r. Para encontrar su valor no tenemos más que poner en la ecuación general de la recta

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

el valor particular de $y = 0$ que ocurre cuando la recta corta al eje horizontal; en ese caso el valor de x es igual a r y reemplazándolo por x y eliminando el término en y por ser nulo tenemos:

$$a\,r + c = 0$$

de cuya expresión es fácil encontrar el valor de r:

$$r = -\frac{c}{a}$$

que conjuntamente con el valor de q antes hallado:

$$q = -\frac{c}{b}$$

forman el par de expresiones para representar una recta en función de las coordenadas al origen.

Ejemplo: Debe representarse la recta cuya ecuación general es:

$$3\,x + 4\,y - 12 = 0$$

y deseamos hacerlo en función de las coordenadas al origen. Las calculamos mediante las expresiones vistas:

$$r = -\frac{-12}{3} = 4$$

$$q = -\frac{-12}{4} = 3$$

Y con estos valores marcamos en la figura 82 las 4 unidades sobre el eje de abscisas y las 3

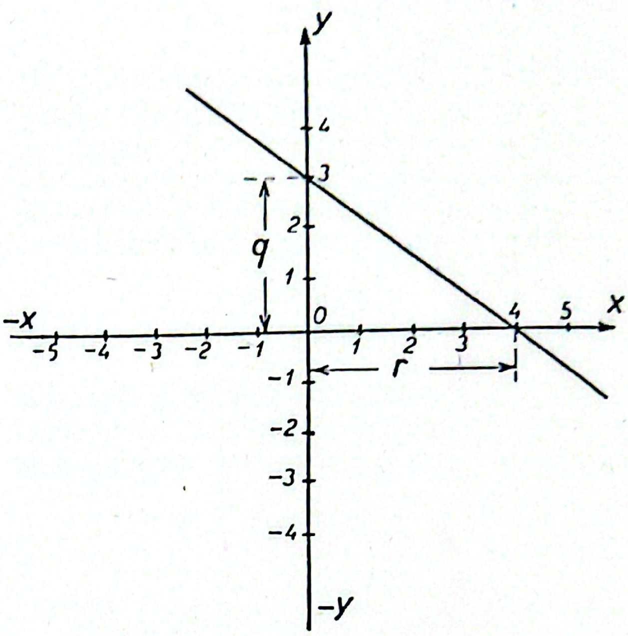


FIG. 82. — Ecuación de la recta relacionada con las coordenadas al origen

unidades sobre el de ordenadas. La recta dada pasará por esos dos puntos, tal como se ha dibujado en la figura.

126. — Distancia entre dos puntos

Cuando se desea calcular la longitud de un segmento de recta o, lo que es lo mismo, la distancia entre dos puntos que serían los extremos de tal segmento, las coordenadas de los mismos nos permiten hallar el dato pedido. Por ejemplo, en la figura 83 tenemos representada una recta, sobre la cual se ha marcado un segmento d limitado por los extremos A y B, de los cuales se conocen sus coordenadas. Al escribir:

$$A\,(1{,}5\,;\,2) \text{ y } B\,(5{,}5\,;\,5)$$

estamos indicando las coordenadas de los puntos A y B, pues en la figura comprobamos que los números que aparecen en primer término dentro de los paréntesis son las abscisas de esos puntos y los segundos son las ordenadas. Para determinar analíticamente la distancia d usaremos el teorema de Pitágoras, que estudiamos en la sección 81. En efecto, en el triángulo ABC podemos aplicar el teorema citado y escribir:

$$d^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

en cuya expresión los catetos del triángulo pueden expresarse en función de las coordenadas de los puntos A y B; tenemos:

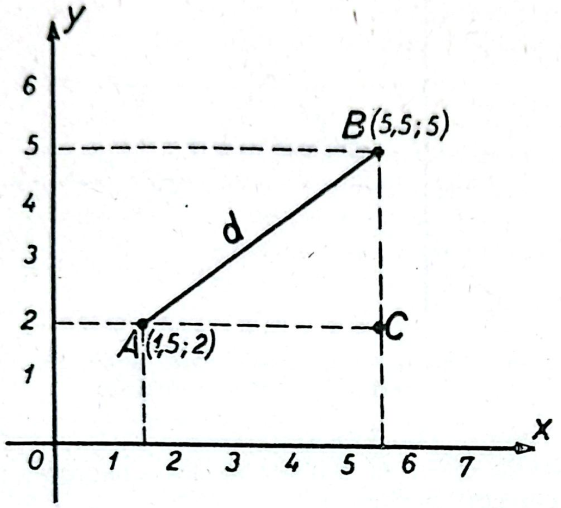


FIG. 83. — Longitud de un segmento o distancia entre dos puntos.

AC es la diferencia entre la abscisa de C, que es igual a la de B y que llamaremos x_2 y la de A que llamamos x_1, es decir:

$$AC = x_2 - x_1$$

BC es la diferencia de ordenadas de los puntos B y C o sea B y A; si llamamos y_2 a la ordenada de B e y_1 a la de A, se tiene:

$$BC = y_2 - y_1$$

Y ahora volvemos a la expresión que nos da la hipotenusa, a la cual le extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

con cuya expresión podemos calcular la longitud del segmento d.

127. — Intersección de rectas

Dos rectas en el plano se cortan si no son paralelas. En la figura 84 hemos representado dos rectas, la m y la n que responden respectivamente a las ecuaciones:

$$3x + 2y - 6 = 0 \qquad (m)$$
$$-4x + 3y + 12 = 0 \qquad (n)$$

El que ambas ecuaciones representan a esas dos rectas lo puede comprobar el lector aplicando el sistema visto de representación de una recta en función de las coordenadas al origen, lo que le servirá de ejercicio de aplicación. Lo que nos interesa ahora es encontrar analíticamente las coordenadas del punto A en que ambas rectas se cortan. Gráficamente podemos leer esas dos coordenadas sobre las escalas marcadas en los ejes, pero debemos encontrar esos valores por medios analíticos. La abscisa del punto A es x_1 y la ordenada es y_1. La particularidad de esos dos valores es que deben satisfacer a las dos ecuaciones dadas, puesto que ese punto pertenece a las dos rectas. Y los valores que satisfacen a las dos ecuaciones son las soluciones del sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que se hallan en la forma estudiada en el capítulo 7.

Procedamos; si en las dos ecuaciones encontramos los valores de las incógnitas, que ya no serán cualesquiera sino los valores particulares x_1 e y_1, habremos resuelto el problema. De los métodos explicados en el capítulo 7 elegimos el de sustitución (sección 62). De la ecuación (m) despejamos el valor de y, al

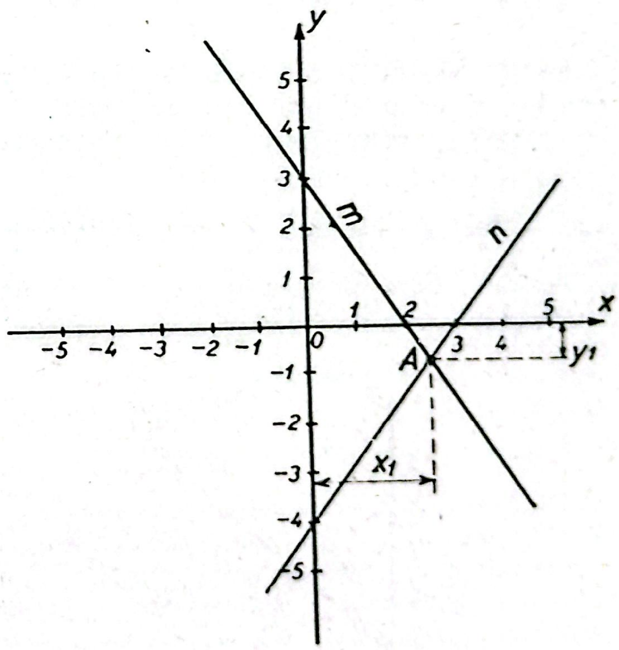


FIG. 84. — Intersección de dos rectas en el plano.

que denominaremos y_1 por las razones expuestas:

$$2y_1 = 6 - 3x$$

$$y_1 = \frac{6 - 3x}{2}$$

y este valor lo reemplazamos en la ecuación (n); en la cual escribimos x_1 en lugar de x por

las razones ya explicadas:

$$-4x_1 + 3\frac{6-3x_1}{2} + 12 = 0$$

en la que multiplicando toda la ecuación por 2 eliminamos el denominador y además, multiplicamos por 3 los términos sobre la raya del quebrado:

$$-8x_1 + 18 - 9x_1 + 24 = 0$$

y ahora ordenamos los términos que contienen la incógnita y pasamos los independientes al segundo miembro:

$$-17x_1 = -42$$

$$x_1 = \frac{-42}{-17} = 2{,}47$$

Valor de la abscisa del punto *A;* reemplazándolo en la expresión que daba y_1 en función de x_1 tenemos:

$$y_1 = \frac{6 - 3 \times 2{,}47}{2} = \frac{6 - 7{,}41}{2} = 0{,}7$$

que es el valor de la ordenada del punto *A* y tenemos resuelto el problema. La figura 84 nos permite verificar los resultados obtenidos.

128. — Rectas paralelas y perpendiculares

Veamos ahora dos casos particulares de rectas, como son las paralelas y las perpendiculares entre sí. Tomemos la ecuación de la recta con la forma:

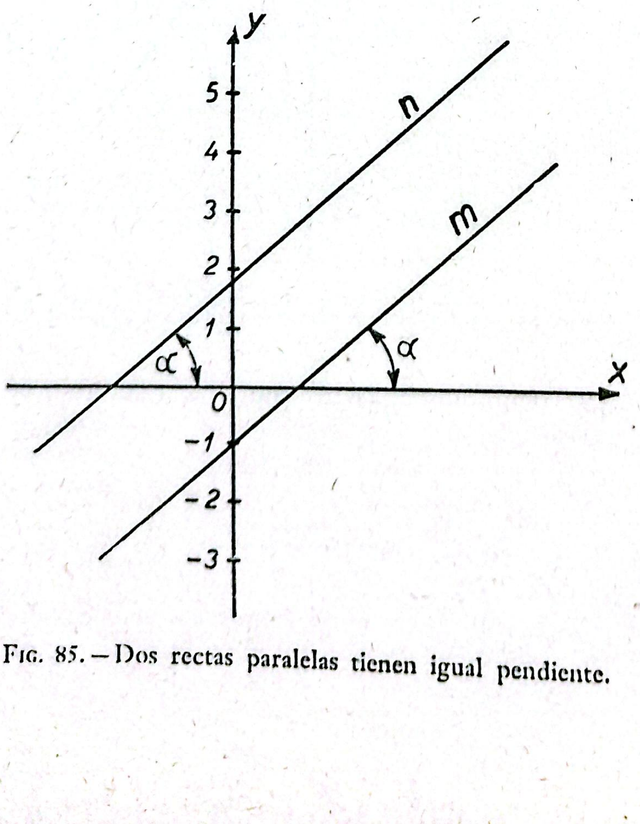


FIG. 85. — Dos rectas paralelas tienen igual pendiente.

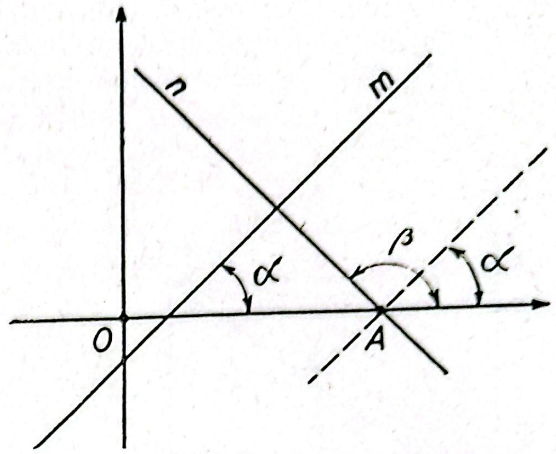


FIG. 86. — Dos rectas perpendiculares tienen pendiente inversa y con signo cambiado.

$$y = px + q$$

ya que si tenemos la forma general sabemos pasar a la expuesta pues conocemos las relaciones entre los coeficientes. El coeficiente del término en x es la pendiente o coeficiente angular de la recta, es decir que es la tangente trigonométrica del ángulo α indicado en la figura 85. Luego, dos rectas paralelas formarán con el eje horizontal el mismo ángulo y deben tener, por lógica consecuencia, el mismo coeficiente angular. Así, las rectas ilustradas en la figura 85 tienen las ecuaciones:

$$y = 0{,}8\,x - 1 \qquad (m)$$
$$y = 0{,}8\,x + 1{,}75 \qquad (n)$$

que se han dibujado mediante las explicaciones dadas anteriormente. Obsérvese que los coeficientes de x son iguales en valor y signo y eso ocurrirá siempre que se tengan dos ecuaciones que representen rectas paralelas entre sí.

Ahora consideremos el caso de rectas perpendiculares, tal como se ve en la figura 86. La recta m forma con el eje horizontal el ángulo α y la recta n forma el ángulo β. El ángulo que forman al cortarse entre sí es de 90°.

Ahora observemos que si por el punto A trazamos una paralela a la recta m, se ve de inmediato que el ángulo β vale:

$$\beta = \alpha + 90°$$

o lo que es lo mismo, mediante un artificio algebraico:

$$\alpha = -(90° - \beta)$$

y por lo visto al tratar la figura 43, sección 79, sabemos que entre dos ángulos complementarios (su suma vale 90°) se cumple la relación:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} (90° - \beta)$$

pero también sabemos que la tangente y la cotangente son recíprocas o inversas entre sí; en este caso, además de la relación recíproca tenemos un signo negativo que tener en cuenta, o sea que se tiene:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Y podemos entonces decir que dos rectas serán perpendiculares cuando sus coeficientes angulares sean recíprocos y con signo inverso. Por ejemplo, las dos rectas siguientes, cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{2}{3} x + 7$$

$$y = -\frac{3}{2} x - 5$$

son perpendiculares por el hecho de que sus coeficientes angulares son el uno inverso del otro y con signo cambiado.

129. — Distancia de un punto a una recta

Uno de los problemas que se presentan en la técnica es el de determinar la distancia entre un punto y una recta en forma analítica. Esa distancia es la medida de la perpendicular bajada desde el punto a la recta, es decir la medida del segmento *AB* o sea la medida *d* en la figura 87. La recta es la *m* y el punto dado es el *A*. La recta se da por su ecuación $y = p x + q$ y el punto por sus coordenadas, valores numéricos que llamaremos x_1 e y_1.

Para encontrar una expresión matemática que nos dé directamente esa distancia, debemos hacer algunas deducciones. Nos ayudaremos con el triángulo *CDE* que hemos dibujado y que está formado por la recta *CD* paralela a la *AB*, la recta auxiliar *n* que hemos trazado como la paralela a la *m* que pase por el punto dado *A*, y el eje de ordenadas. Entonces el problema se plantea con los datos, que son la recta *m* y el punto *A*, y eso nos bastará en el futuro para resolver el problema; las otras cosas que vemos en la figura 87 son para la deducción de la fórmula que nos dará el valor *d*.

Hemos marcado el ángulo *α* que forma la recta *m* con el eje de abscisas pues es conocido, ya que el coeficiente angular *p* de la ecuación de la recta es la tangente trigonométrica de

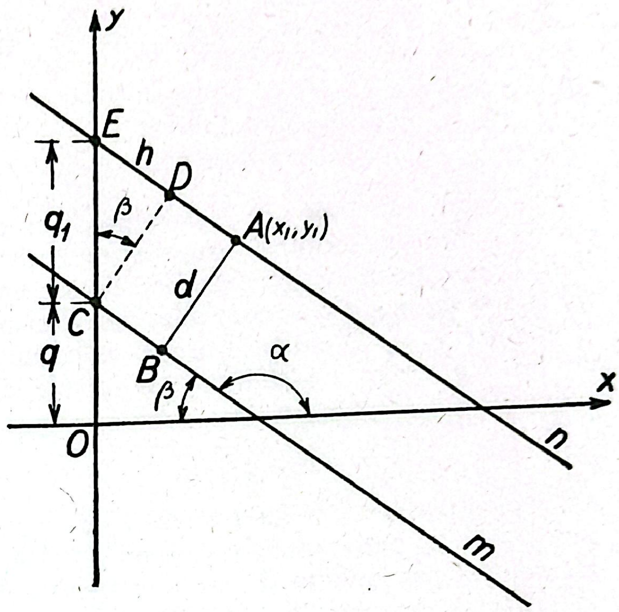


FIG. 87. — Distancia de un punto a una recta

ese ángulo. El complemento de ese ángulo es el β, de modo que la suma de α más β da 180°. También hemos marcado el ángulo β dentro del triángulo *CDE*, y es el mismo por estar formado por rectas perpendiculares a las que forman el marcado sobre el eje de abscisas. Por ser los ángulos α y β suplementarios, la tangente de uno es igual a la del otro con signo contrario, o sea:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$$

Ahora nos ocuparemos del triángulo *CDE* en el cual sus catetos los hemos designado *d* y *h* y su hipotenusa es la medida q_1 que complementa a la medida *q*, ordenada al origen de la recta *m* para dar, sumando esos dos segmentos, la ordenada al origen de la recta *n*, auxiliar trazada. En el triángulo citado se tiene:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{d} = -\operatorname{tg} \alpha = -p$$

habiéndose puesto la igualdad con el coeficiente angular de la recta *m* por necesitarla para lo que sigue. Además, el teorema de Pitágoras nos da:

$$q_1^2 = d^2 + h^2$$

en la cual podemos reemplazar el valor del cuadrado de b extraído de la expresión anterior de la tangente: ese valor es:

$$b^2 = d^2 p^2$$

pues el signo negativo se eliminó al elevar al cuadrado. Reemplazando:

$$q_1^2 = d^2 + d^2 p^2$$

$$q_1^2 = d^2 (1 + p^2)$$

$$q_1 = d \sqrt{1 + p^2}$$

Habiendo obtenido el valor precedente, pasamos ahora a escribir la ecuación de la recta n, la que tiene la particularidad de ser paralela a la m, luego tendrá el mismo coeficiente angular y su ordenada al origen es la suma de los segmentos marcados sobre el eje de ordenadas; esa ecuación es:

$$y = p\,x + q + q_1$$

de la cual podemos deducir el valor de q_1 que nos interesa, pero además podemos colocar los valores particulares de las coordenadas de la recta n que corresponden al punto A, ya que para ellos la ecuación también se cumple. Tenemos:

$$q_1 = y_1 - p\,x_1 - q$$

Expresión que podemos igualar a la otra que nos daba q_1 y deducir de esa igualdad el valor de la distancia d:

$$d \sqrt{1 + p^2} = y_1 - p\,x_1 - q$$

$$\mathrm{d} = \frac{y_1 - p\,x_1 - q}{\pm \sqrt{1 + p^2}}$$

en cuya expresión ponemos doble signo a la raíz, como corresponde, pero debemos tomar para ella el signo que haga positivo al resultado, pues una distancia no puede dar negativa. Un ejemplo nos aclarará el uso de la fórmula.

Ejemplo:

Sea una recta de ecuación $y = 2\,x + 3$ y un punto de coordenadas $A\ (5\,;4)$. Se desea saber la distancia de ese punto a la recta. Aplicamos la fórmula, teniendo en cuenta que $p = 2$ y que $q = 3$:

$$d = \frac{4 - 2 \times 5 - 3}{\pm \sqrt{1 + 2}} = \frac{-9}{-\sqrt{5}} = \frac{9}{2{,}25} = 4$$

Y se ve que se debió tomar signo negativo para la raíz para que el resultado sea una cantidad positiva.

130. — Recta que pasa por un punto

Supongamos que se desea determinar la ecuación de una de las rectas que pasan por el punto A, según figura 88. Hay infinitas rectas que pasan por ese punto, pero nos interesa la ecuación general de cualquiera de

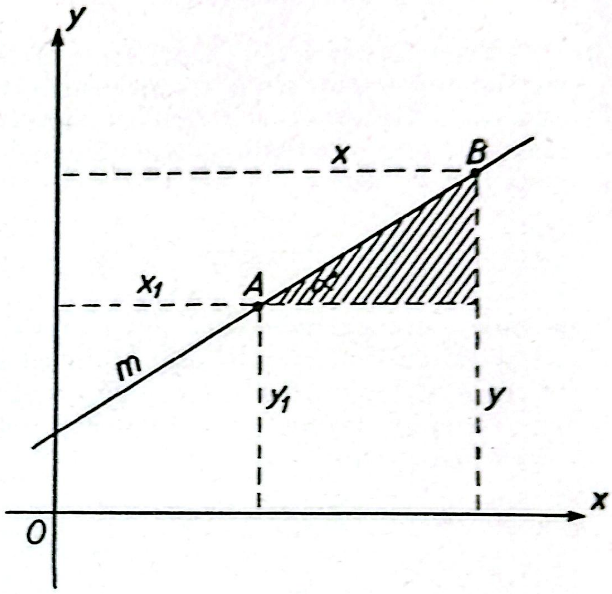


FIG. 88. — Recta que pasa por un punto dado.

esas rectas. En el triángulo rayado en la figura, la tangente del ángulo en el vértice A vale:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

pero esa tangente es el coeficiente angular de la recta que pasa por A y por otro punto cualquiera, de coordenadas libres x e y, como el B. Luego, podemos escribir:

$$y - y_1 = p\,(x - x_1)$$

Y esta será la ecuación de las rectas que pasan por A, puesto que en cuanto conozcamos las coordenadas de dicho punto $(x_1\,;y_1)$ y la pendiente de la recta que nos interesa, tal ecuación se transforma en una del tipo general:

$$y = p\,x + q$$

131. — Recta que pasa por dos puntos

Tomemos ahora la figura 89 en la cual hay dos puntos A y B dados por sus coordenadas y queremos determinar la ecuación de la única recta que pasa por esos dos puntos dados. La ecuación de todas las rectas que pasan

por A la habíamos encontrado más arriba, y era:

$$y - y_1 = p\,(x - x_1)$$

y la recta pedida está determinada también por esta ecuación, pero debemos fijar una condición para que la misma pase también por

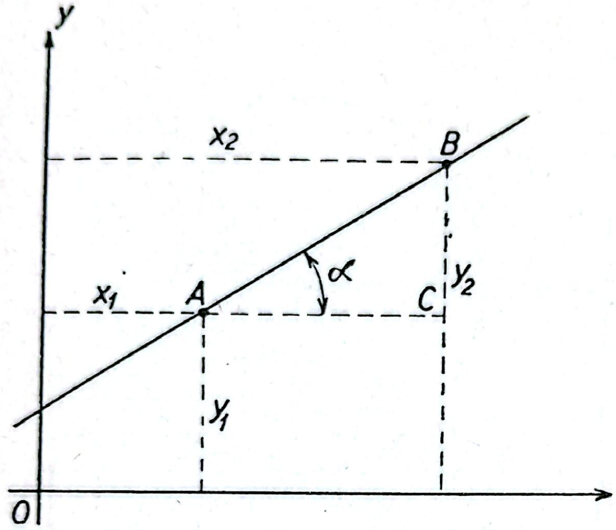


FIG. 89. — Recta que pasa por dos puntos dados.

B. Si consideramos el triángulo ABC, podemos calcular la tangente del ángulo en A mediante la relación entre los catetos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y esta tangente no es otra cosa que el coeficiente angular o pendiente de la recta que nos interesa, pues la misma pasa por los puntos fijados A y B; es decir que es el valor de p de la ecuación que teníamos. Luego, la ecuación pedida será:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

Ejemplo: Supongamos que queremos hacer pasar una recta por los puntos $A\,(3\,;4)$ y $B\,(2\,;6)$. Determinaremos la ecuación de dicha recta. Reemplazando valores en la ecuación antes obtenida se tiene:

$$y - 4 = \frac{6 - 4}{2 - 3}\,(x - 3)$$

y haciendo operaciones resulta:

$$y - 4 = -\frac{2}{1}\,(x - 3)$$

$$y - 4 = -2\,x + 6$$

$$y = -2\,x + 10$$

y la recta pedida tiene por ecuación a la última obtenida, en la cual vemos que el coeficiente angular es -2 y la ordenada al origen es 10.

132. — Las cónicas

En el capítulo 4 nos ocupamos de los cuerpos sólidos, estudiando únicamente la manera de calcular el área externa y el volumen. Uno de los cuerpos regulares que mencionamos era el cono, figura 18, y lo podemos imaginar como engendrado por una recta generatriz que gira sobre uno de sus extremos de tal modo que se apoya sobre una circunferencia que es la base del cono. Ese cuerpo sería un caso particular, porque si en vez de tomar el extremo de una recta, la consideramos ilimitada y la hacemos girar sobre uno de sus puntos, se generaría el cono completo o doble que vemos en la figura 90. Podemos limitar a dicho cuerpo mediante dos planos que le sirven de bases, y sobre los cuales, si son perpendiculares al eje del cono, veremos circunferencias.

Pero lo que nos interesa del cono completo son las figuras o curvas que se obtienen cortándolo con planos. Un plano perpendicular al eje corta a la superficie externa del cono según una *circunferencia;* si inclinamos al plano intersector la figura es una *elipse*, que así se llama una curva cerrada que asemeja una circunferencia estirada que tiene un diá-

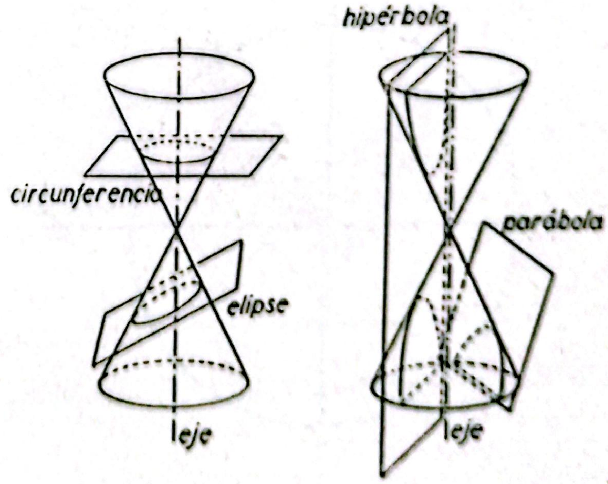


FIG. 90. — Obtención de las cónicas mediante intersección de planos con el cono doble o completo.

metro mayor y otro menor, perpendicular al primero. Si el plano lo colocamos paralelo al eje sin tocarlo, la intersección con el cono da una curva doble o de dos ramas, que se

llama *hipérbola;* y finalmente, si el plano lo colocamos paralelo a la generatriz o borde del cono, se obtiene una curva llamada *parábola.*

Las curvas descriptas, dos de ellas cerradas y dos abiertas, tienen importancia en la técnica, por lo que suelen estudiarse en forma analítica en Matemáticas. En efecto, sin mencionar a la circunferencia porque su importancia no necesita comentarios, la elipse es la forma de las órbitas de los planetas, de ciertos arcos en la construcción, de dispositivos mecánicos de transmisión, etc. La parábola es la forma que adquiere un cable suspendido entre dos postes, la de los reflectores para iluminación, etc. No se necesitan más ejemplos para demostrar que encontraremos referencias a estas curvas en los libros técnicos. Las estudiaremos en el orden en que las mencionamos al referirnos a la figura 90.

133. — Ecuación de la circunferencia

La ecuación de una curva es aquella que vincula las coordenadas de un punto cualquiera de la misma, de tal modo que conociendo el valor de una de ellas se puede determinar la otra, o sea que buscamos una función $y = f(x)$; tal ecuación debe servir para cualquiera de los puntos de la curva. Entonces, si dibujamos una circunferencia y, por comodidad, trazamos los ejes cartesianos pasando por su centro, tenemos el caso de la figura 91. Un punto cualquiera de la circunferencia es el A y si escribimos el teorema de Pitágoras para el triángulo rayado, teniendo en cuenta que los catetos son la abscisa y la ordenada del punto A y que la hipotenusa es el radio, tenemos:

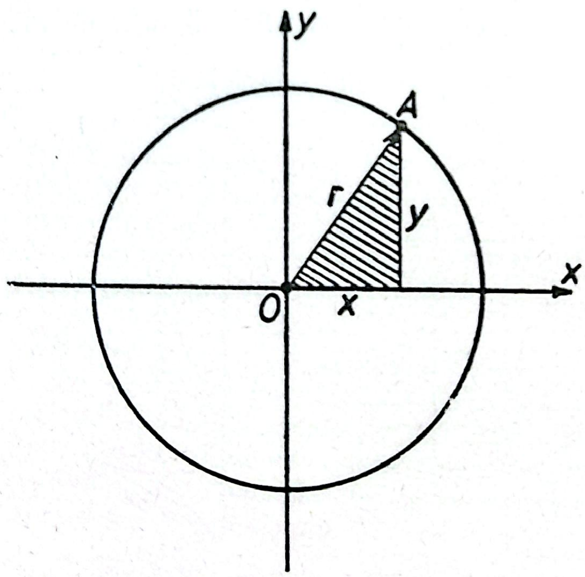


FIG. 91. — Circunferencia referida a ejes cartesianos que pasan por su centro.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Y la precedente sería la ecuación de la circunferencia referida a un par de ejes coordenados que pasan por su centro. Como éste es un caso muy particular, coloquemos la circunferencia en un lugar cualquiera del plano, de tal modo que su centro O' no coincida con el centro O del sistema de ejes cartesianos, según lo muestra la figura 92. También aquí hemos rayado un triángulo al cual le podemos aplicar el teorema de Pitágoras; el cateto horizontal vale $(x - a)$ y el vertical $(y - b)$ siendo a y b las coordenadas del centro de la circunferencia O'. Luego, aplicando el teorema mencionado:

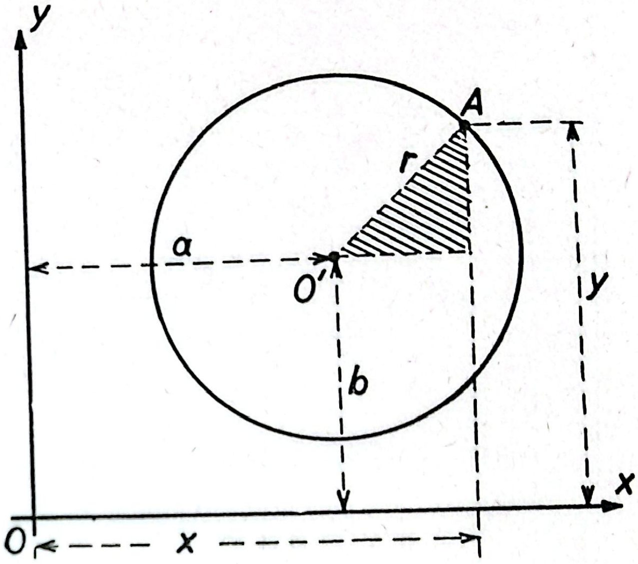


FIG. 92. — Circunferencia referida a ejes cartesianos en cualquier posición.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Que sería la ecuación general de la circunferencia de radio r. Los valores de las coordenadas del centro se consideran conocidos. Por ejemplo, si una circunferencia tiene radio $r = 5$ y su centro O' tiene coordenadas $a = 3$ y $b = 4$, su ecuación será:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

En la ecuación general, si hacemos $a = b = 0$, que sería el caso particular planteado en la figura 91, obtenemos la ecuación reducida ya vista.

134. — Intersección entre recta y circunferencia

Uno de los casos más comunes en la técnica es la determinación de los puntos de intersección entre una recta y una circunferencia, ambas dadas por sus ecuaciones. En general, una recta puede no cortar a una circunferencia, tocarla en un punto (tangente) o cortarla en dos puntos (secante); luego, consideremos el caso de que la corte, pues si así no ocurre no hay puntos de contacto y no podemos calcular nada. Tendremos dos ecuaciones, una de la circunferencia y otra de la recta; resolviendo ambas en forma conjunta, es decir, encontrando los valores de las coordenadas que satisfagan a ambas ecuaciones, ellos deben corresponder a los puntos de contacto. Si nos resulta un solo punto, la recta es tangente a la circunferencia.

Por ejemplo, sea la circunferencia cuya ecuación dimos como ejemplo más arriba y la recta cuya ecuación es:

$$y = x + 2$$

Resolvamos primero el problema en forma gráfica, tal como se ve en la figura 93. La circunferencia se traza con radio $r = 5$ y centro O' (3 ; 4) y comprobamos que casualmente pasa por el origen O de coordenadas. La recta tiene una ordenada al origen de 2 y una

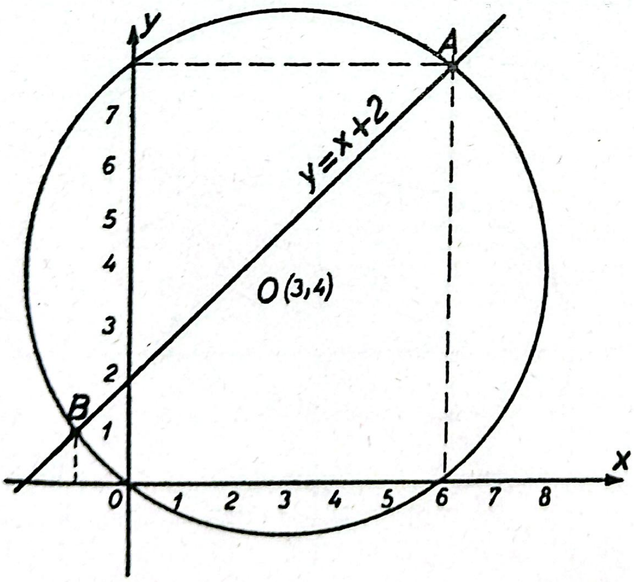


Fig. 93. — Intersección de una recta con una circunferencia.

pendiente que vale la unidad. Luego, por el punto $y = 2$ debemos trazar una recta cuya inclinación corresponde a un ángulo cuya tangente vale uno. Vamos a la tabla y encontramos que el ángulo es 45°. Los puntos de intersección son dos, los A y B con coordenadas (5,9 ; 7,9) y (— 0,9 ; 1,1) medidas aproximadamente en el gráfico. Veamos la solución analítica.

Reemplazamos en la ecuación de la circunferencia el valor de y dado por la ecuación de la recta:

$$(x - 3)^2 + (x + 2 - 4)^2 = 25$$

donde el segundo paréntesis queda $(x - 2)$ y ahora resolvemos los cuadrados de ambos binomios (sección 36), teniéndose:

$$x^2 + 9 - 6x + x^2 + 4 - 4x = 25$$

que simplificada y pasando todos los términos al primer miembro queda:

$$2x^2 - 10x - 12 = 0$$

Y resultó una ecuación general completa de segundo grado, de la cual sabemos calcular las raíces (capítulo 12). Aplicamos la fórmula que da esas raíces (sección 116):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y al hacer operaciones encontraremos dos valores para x que llamaremos:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{100 + 96}}{4} = \frac{23,6}{4} = 5,9$$

$$x_2 = \frac{10 - \sqrt{196}}{4} = \frac{-3,6}{4} = -0,9$$

Que son las abscisas de los puntos A y B respectivamente, y con estos dos valores obtenemos las ordenadas de los puntos A y B mediante su reemplazo en la ecuación dada de la recta, por ser más sencillo:

$$y_1 = 5,9 + 2 = 7,9$$
$$y_2 = -0,9 + 2 = 1,1$$

Los resultados han confirmado el gráfico de la figura 93. Hacemos la aclaración que la raíz cuadrada fue obtenida mediante el uso de la regla de cálculos, cuya técnica fue, explicada en el captíulo 10.

135. — Tangente a una circunferencia

Otro problema frecuente en la técnica es trazar una tangente a una circunferencia por un punto dado. La figura 94 plantea el pro-

blema en forma gráfica, teniéndose una circunferencia de radio $r = 2$ con centro O' $(3\,;3{,}5)$ y un punto A $(4{,}5\,;4{,}8)$ que está so-

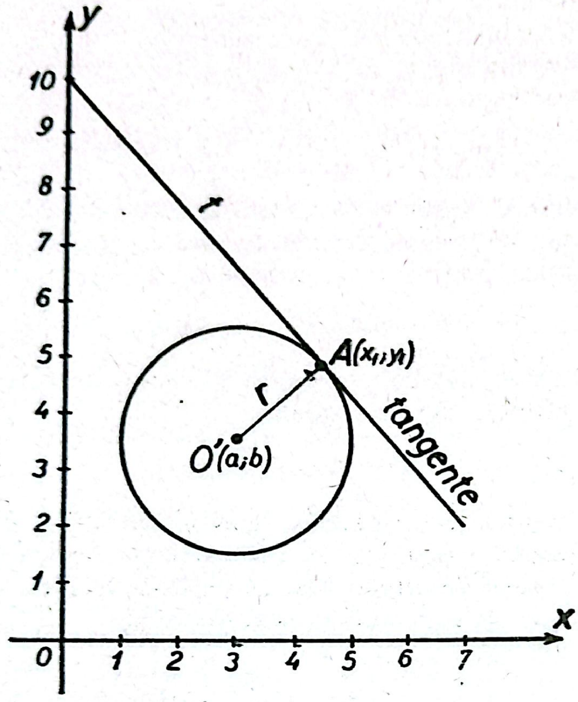


Fig. 94.— Tangente a una circunferencia.

bre la circunferencia. Por este punto deseamos trazar la tangente t, que debe ser perpendicular al radio r que pasa por dicho punto A. Trazada gráficamente, vemos que es una recta que tiene una ordenada al origen de $q = 10$. Pero veamos cómo se resuelve el problema en forma analítica.

La ecuación de todas las rectas que pasan por el punto A la conocemos (figura 88):

$$y - y_1 = p\,(x - x_1)$$

En cuya ecuación el coeficiente angular p es el de la recta que pasa por dos puntos (figura 89) que son O' y A; vale:

$$p = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

Y para la tangente, la consideramos una recta perpendicular a ese radio $O'A$ y entonces el coeficiente angular de la recta t será inverso en valor y con signo contrario (sección 128) al de la recta r. Luego escribimos la ecuación de t:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\,(x - x_1)$$

Ejemplo: Resolvamos analíticamente el problema planteado en la figura 94. El punto A debe estar sobre la circunferencia, o sea que sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de aquella, que es, para este caso:

$$(x - 3)^2 + (y - 3{,}5)^2 = r^2$$

y poniendo en lugar de x su valor $x_1 = 4{,}3$; para y su valor $y_1 = 5$ y para r su valor 2, encontramos que:

$$(4{,}5 - 3)^2 + (4{,}8 - 3{,}5)^2 = 4$$

se satisface la ecuación dentro de la aproximación que dan los decimales obtenidos del gráfico. Ahora podemos escribir la ecuación de la tangente t:

$$y - 4{,}8 = -\frac{4{,}5 - 3}{4{,}8 - 3{,}5}\,(x - 4{,}5)$$

$$y - 4{,}8 = -\frac{1{,}5}{1{,}3}\,(x - 4{,}5)$$

$$y - 4{,}8 = -1{,}16\,x + 5{,}2$$

$$y = -1{,}16\,x + 10$$

Que, como es fácil comprobar, es la ecuación de la recta t de la figura 94.

136. — Ecuación de la elipse

Hemos dicho que la elipse es una figura cerrada que se obtiene cortando, con un plano oblicuo al eje, a la superficie externa de

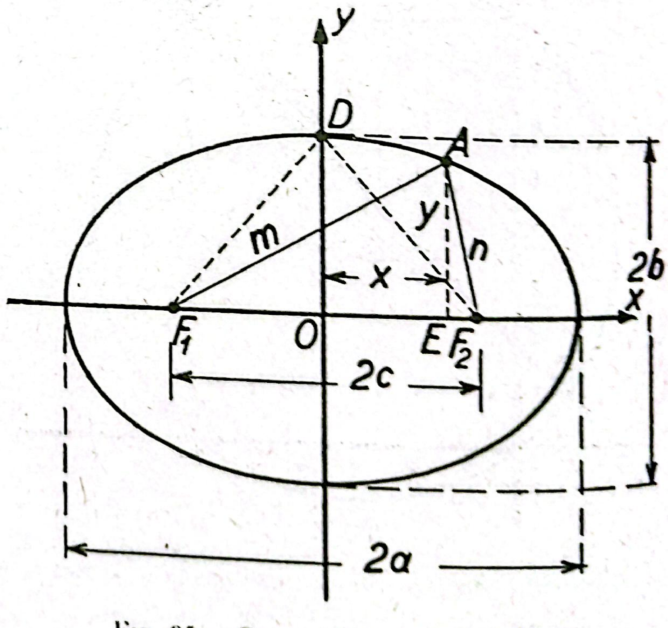


Fig. 95. — Características de la elipse.

un cono; también resulta esa misma figura cortando a la superficie exterior de un cilindro con un plano oblicuo al eje. La figura 95

nos muestra una elipse y sus principales dimensiones características; tiene dos ejes cuyas medidas las indicamos como $2a$ y $2b$, y dos *focos* F_1 y F_2 que distan de una medida $2c$. Cualquier punto de la curva como el A dista de los focos dos medidas m y n tales que se cumple siempre:

$$m + n = 2\,a$$

Y esa condición permite dibujar la elipse con un piolín de largo $2a$ y fijándolo en los focos por sus extremos; un lápiz que mantenga tenso al piolín va dibujando la curva.

El punto D colocado en el vértice superior también cumple la condición anterior, de modo que, por simetría, para ese punto se igualan las medidas m y n y entonces la medida del segmento F_1D resulta igual al semieje mayor a. Y en el triángulo F_1OD, que es rectángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Tomando los ejes coordenados en forma coincidente con los ejes de la elipse se simplifica la ecuación de la curva. La abscisa sería la distancia de cualquier punto como el A hasta el eje vertical y la ordenada la distancia de ese mismo punto al eje horizontal, tal como se indican en la figura con ayuda de la perpendicular bajada desde el punto A al eje de abscisas.

Obsérvese que se forman dos triángulos rectángulos, el EAF_1 y el EAF_2, para los cuales podemos aplicar el teorema de Pitágoras y poner:

$$(c + x)^2 + y^2 = m^2$$

$$(c - x)^2 + y^2 = n^2$$

Y si ahora extraemos la raíz cuadrada de ambas expresiones nos quedan en los segundos miembros m y n, cuya suma es $2a$. Luego, sumando las raíces cuadradas de los primeros miembros podemos igualar esa suma a $2a$:

$$\sqrt{(c + x)^2 + y^2} + \sqrt{(c - x)^2 + y^2} = 2\,a$$

Y puede hacerse una serie de transformaciones matemáticas mediante la elevación al cuadrado de toda la ecuación, que omitimos por carecer de interés para nuestro objetivo. Se llega después de un largo proceso a la ecuación final de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es una ecuación de segundo grado en x e y en la que aparecen como cantidades fijas los semiejes de la elipse.

137. — Ecuación de la hipérbola

La hipérbola se obtiene cortando al cono doble con un plano paralelo al eje que no coincida con éste; su aspecto y principales dimensiones se ven en la figura 96. Tiene sus

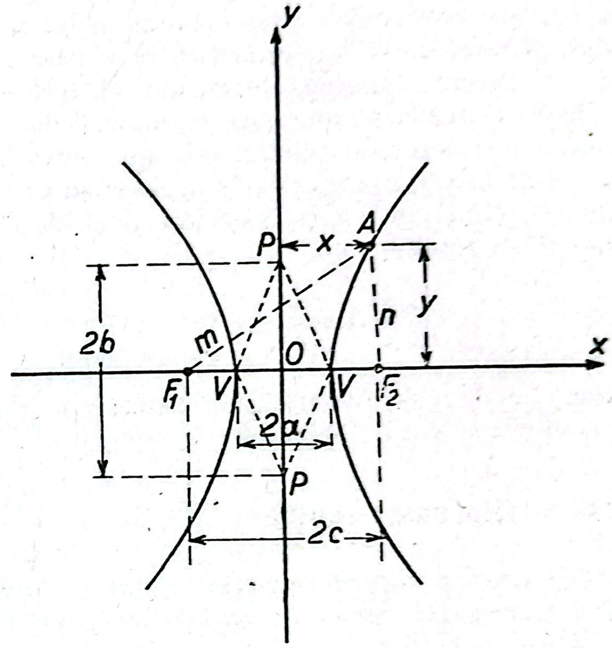


FIG. 96. — Características de la hipérbola.

dos focos, su eje principal que pasa por ellos, sus dos vértices V y dos puntos P convencionales, ubicados de tal manera que la medida PV sea igual a la mitad de la distancia entre focos. Con esta convención, se puede aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo POV cuyo cateto horizontal es el semieje a, cuyo cateto vertical es un ficticio semieje b y la hipotenusa mide la semidistancia focal c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Los puntos de la hipérbola tales como el A se encuentran de tal modo que se cumpla la condición:

$$m - n = 2\,a$$

Luego para dibujarla, hacemos centro en F_1 con el compás, tomando una abertura cualquiera, y trazamos un arco; a esa medida le descontamos la dimensión $2a$ y con la nueva abertura hacemos centro en F_2 y trazamos otro arco que corte al primero. Se obtendrá

un punto que pertenece a la hipérbola. Los puntos obtenidos con diferentes aberturas del compás se unen con un trazo y nos quedará la curva, de ramas indefinidas.

Para encontrar la ecuación de la hipérbola se procede en forma similar al caso de la elipse, formando dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son las medidas m y n. No los dibujamos para no complicar la figura, pero aparecerían bajando la perpendicular desde A hasta el eje horizontal; los catetos verticales de ambos triángulos son iguales a la ordenada y del punto A y los catetos horizontales serían, para el de la izquierda $(c+x)$ y para el de la derecha $(c-x)$. Haciendo el mismo planteo matemático que para la elipse llegaremos a una ecuación similar, solo que antes la suma de m y n era igual a $2a$ y ahora lo es la diferencia; entonces la ecuación final de la hipérbola resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cuya deducción desarrollada omitimos por no interesar para el objetivo de este libro.

138. — Hipérbola equilátera

Si por el punto O trazamos rectas que encuentren a las ramas de la hipérbola en el infinito, esas rectas se llaman *asíntotas*, y las vemos en la figura 97, en la que hemos dibujado una hipérbola especial y en posición distinta a la anterior. Esta hipérbola especial se llama *equilátera* porque se traza con la condición:

$$a = b$$

Mirando la figura en forma inclinada, de modo que el eje x quede horizontal y el y vertical, vemos que el rombo que formábamos con los puntos V y P es ahora un cuadrado. Pero la hipérbola equilátera se representa generalmente referida a un par de ejes que son las dos asíntotas y que hemos denominado en la figura 97 como x' e y'. Podemos encontrar fácilmente la ecuación de una curva referida a un sistema de ejes que ha sido desplazado de un ángulo (sección 123), y será fácil puesto que ese ángulo en este caso es de $-45°$; el signo negativo se debe a que x' se ha desplazado en el sentido negativo de la rotación angular convencional.

Interesa especialmente en la técnica la ecuación de la hipérbola equilátera, de modo que la deduciremos. Primero tomamos la ecuación general de la hipérbola y ponemos en lugar de b el valor a, puesto que son iguales:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

y multiplicando toda la ecuación por el cuadrado de a obtenemos:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

que sería la ecuación de la hipérbola equilátera referida al sistema normal xy de ejes cartesianos que utilizamos en la figura 96. Para

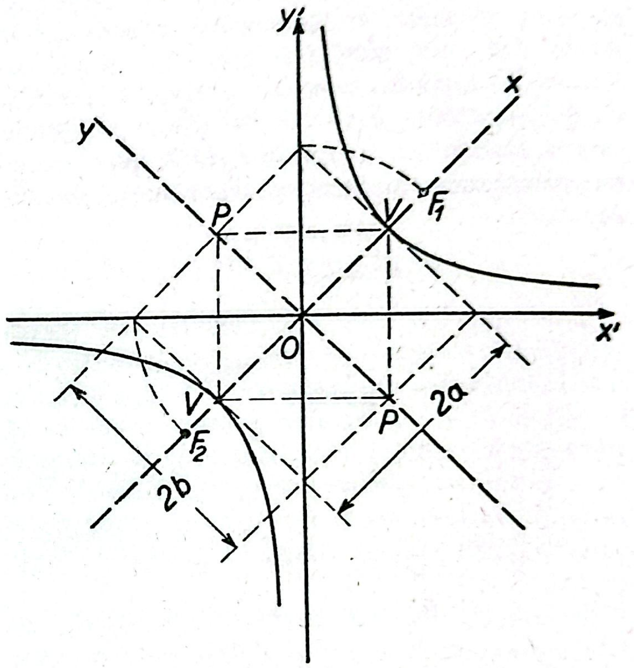


Fig. 97. — Características de la hipérbola equilátera.

referir esa ecuación a los ejes $x'y'$ que tenemos en la figura 97 debemos aplicar las expresiones de la rotación de ejes tratadas para la figura 78, pero teniendo en cuenta que el seno y el coseno de 45° tienen el mismo valor 0,707; como ese ángulo es negativo, el seno será negativo y el coseno positivo. El cuadrado de dicho valor numérico es 0,5. Las fórmulas de transformación las usaremos poniendo en lugar del seno el valor $-0{,}707$ y del coseno 0,707:

$$x = 0{,}707\, x' + 0{,}707\, y'$$

$$y = -0{,}707\, x' + 0{,}707\, y'$$

Colocando estos dos valores en la ecuación de la hipérbola equilátera y teniendo en cuenta que el cuadrado de 0,707 vale 0,5 se tiene:

$$0{,}5\,(x' + y')^2 - 0{,}5\,(x' - y')^2 = a^2$$

Y desarrollando los cuadrados se eliminan los términos cuadráticos por aparecer con signos contrarios y nos queda:

$$x' y' = \frac{a^2}{2}$$

Que sería la ecuación de la hipérbola equilátera referida a un sistema de ejes que coincide con sus asíntotas. Como la cantidad expresada

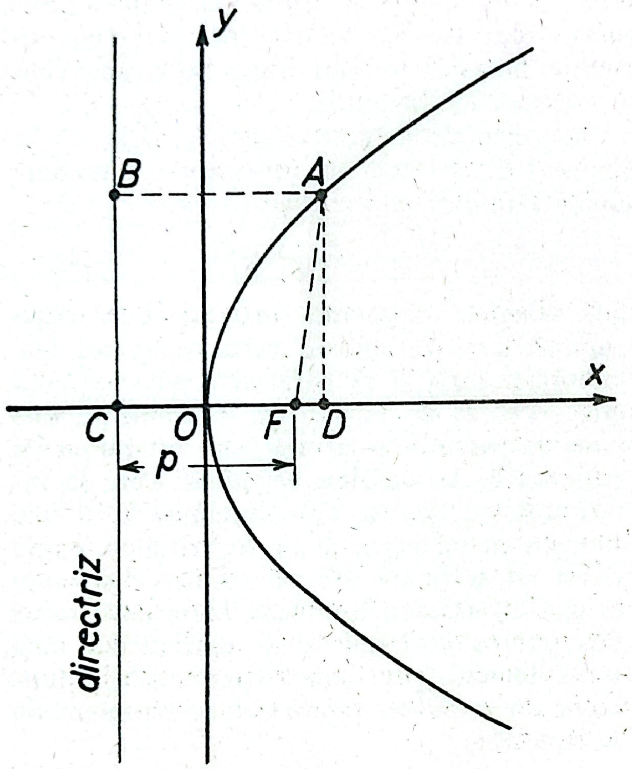


FIG. 98. — Características de la parábola

en el segundo miembro es una constante para cada caso, suele escribírsela como una lerta k y tendremos, para los casos generales de la práctica, en los cuales puede llamarse x e y a los ejes asintóticos:

$$x\,y = k$$

Ecuación final que permite dibujar fácilmente la hipérbola equilátera. En efecto, tomemos una hipérbola equilátera de ecuación:

$$x\,y = 3$$

y para dibujarla consideremos que cada valor que se tome para x, al multiplicarlo por el que resulta para y nos debe dar siempre 3. Por ejemplo, para $x = 0{,}5$ resulta $y = 6$; para $x = 1$ resulta $y = 3$; para $x = 3$ $y = 1$; $x = 6$, $y = 0{,}5$ etc. Y si observamos la curva de la figura 97 comprobaremos que corresponde al ejemplo propuesto.

139. — Ecuación de la parábola

La parábola se obtiene cortando a un cono con un plano paralelo a la generatriz. Por definición, es una curva en la cual sus puntos equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz. La figura 98 nos aclara la definición, pues un punto cualquiera como el A pertenece a la parábola si son iguales las distancias:

$$AB = AF$$

Como esa condición se debe cumplir para el vértice O de la curva, el mismo equidista del foco y de la directriz, de modo que:

$$OC = OF$$

y estas medidas son iguales a la mitad de CF. Al doble de esa medida CF se le llema *parámetro* de la parábola, asignándosele la designación $2p$.

Para determinar la ecuación de la parábola es cómodo tomar los ejes de tal modo que el de abscisas coincida con el eje de la curva que pasa por el foco y el de ordenadas pase por el vértice O. Luego la abscisa de un punto cualquiera como el A será $x = OD$ y la ordenada $y = AD$.

Ahora determinemos la distancia entre los puntos A y O según lo estudiado en la sección 126; esos puntos se escribirían con sus coordenadas así:

$$A\,(x\,;y)$$

$$O\left(\frac{p}{2};0\right)$$

pues la ordenada de O es nula. La expresión de la distancia pedida, aplicada a esos dos puntos, da:

$$FA = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

y la otra distancia, que es igual a la precedente, vale:

$$AB = x + \frac{p}{2}$$

Luego, podemos igualar las expresiones que dan esas dos distancias iguales:

$$x + \frac{p}{2} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

Ahora, elevando al cuadrado ambos miembros se elimina la raíz, y desarrollando los cuadrados de los binomios se eliminan los términos

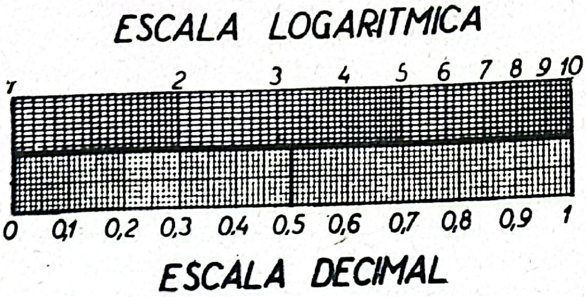


FIG. 99. — Los dos tipos de escalas usados en las representaciones gráficas.

cuadráticos por tener igual signo y estar en distintos miembros; nos queda después de esas operaciones:

$$y^2 = 2\,p\,x$$

Y como el parámetro $2p$ es una constante para cada curva, podemos escribir la ecuación general de las parábolas usando la letra k que significa constante:

$$y^2 = k\,x$$

Que nos dice que una ecuación de segundo grado en x e y de la forma anterior representará una parábola cuya constante es igual al doble de la distancia entre el foco y la directriz.

140. — Gráficos logarítmicos

La técnica ha impuesto el uso de papeles para gráficos cuyas divisiones no son milimétricas, por razones de comodidad y rapidez en las determinaciones. Para poder comparar ambos tipos de papeles, la figura 99 nos muestra dos tiras adosadas de uno y otro tipo; el inferior es el milimetrado común y el superior es el llamado *logarítmico*. Sus divisiones son tales que si marcamos sobre el mismo los números comunes, en uno milimetrado adosado tenemos los logaritmos decimales de dichos números; así el logaritmo de 1 es 0, el de 10 es 1, el de 100 es 2, etc. Existen los papeles mixtos, en los cuales en uno de los sentidos hay divisiones decimales y en el otro logarítmicas, con lo cual tenemos tres clases de papeles para gráficos: el decimal o milimetrado común, el decimal-logarítmico y el doble logarítmico.

Para poder apreciar las ventajas del papel logarítmico veamos la figura 100, que nos muestra un papel milimetrado común, en el cual se ha representado la función:

$$y = \log x$$

es decir que como abscisas se han tomado los números y como ordenadas los logaritmos decimales de los mismos. La curva resultante se dibuja por puntos y hay que tomar tantos de ellos como sea posible para obtener un trazado preciso. Compárese este gráfico con el de la figura 101, que es el mismo, pero usando un papel de escala horizontal logarítmica y vertical decimal. La misma función resulta con un gráfico que es una línea recta, luego, para dibujarla basta determinar dos puntos de ella. La ventaja de este segundo gráfico no está tanto en el uso del mismo sino en la tarea de obtenerlo.

Otro ejemplo ilustrativo sería el dado en la figura 102. Se trata de representar una función parabólica de ecuación:

$$x = y^2$$

que sabemos representa una parábola cuyo parámetro es la unidad; pero aclaramos que lo mismo sería si el parámetro tuviera cualquier otro valor. Se obtiene, lógicamente, una rama de parábola y la otra rama estaría en las regiones de las abscisas negativas. Pero lo interesante es que si representamos la misma función en un papel doble logarítmico, como se ve en la figura 103, el gráfico resultante es una línea recta. Entonces, basta determinar dos puntos cualesquiera y unirlos con una recta ilimitada para tener representada la función. En la misma figura hemos representado la función:

$$y = x^2$$

que es otra parábola de eje horizontal, y que

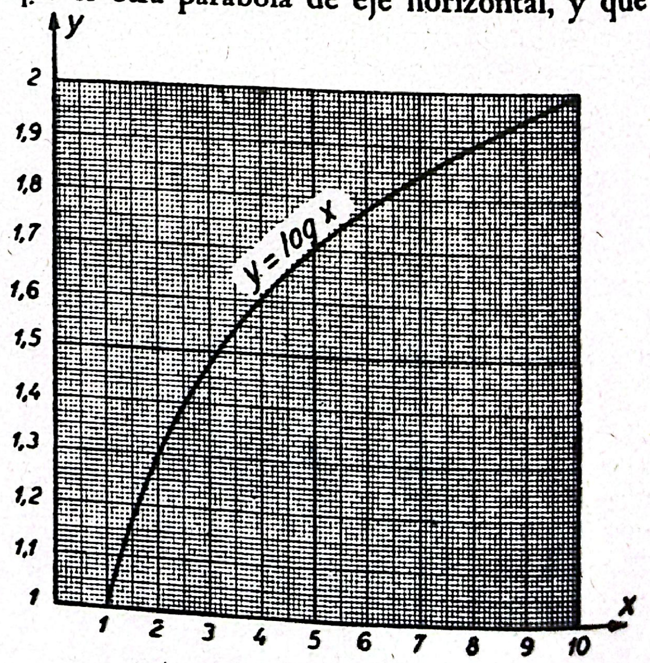


FIG. 100. — Representación de la curva logarítmica.

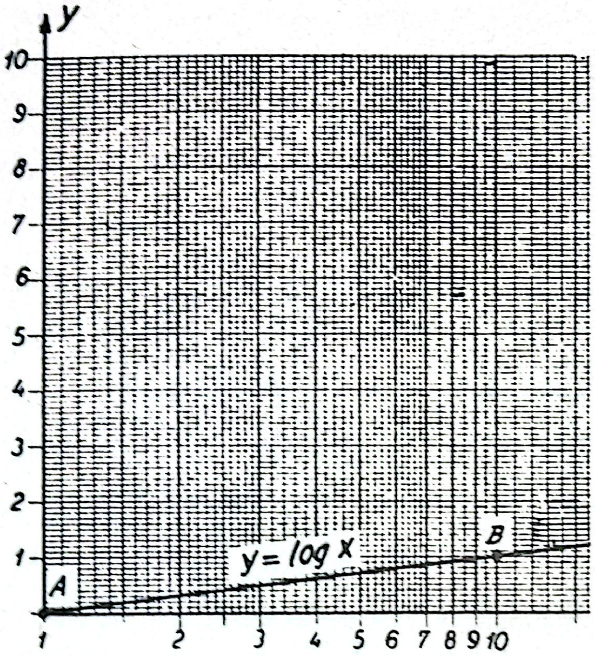


Fig. 101. — Representación de la curva logarítmica transformada en lineal mediante el papel simple-logarítmico.

también resulta representada con una línea recta.

La función parabólica también se llama *cuadrática* y entonces resulta que toda función cuadrática, representada en un papel logarítmico, da una recta. Dicho en otros términos, una función en la cual una de las coordenadas es función de la otra elevada al cuadrado, con o sin coeficientes, dará una recta en su gráfico representado en el tipo de papel que vemos en la figura 103.

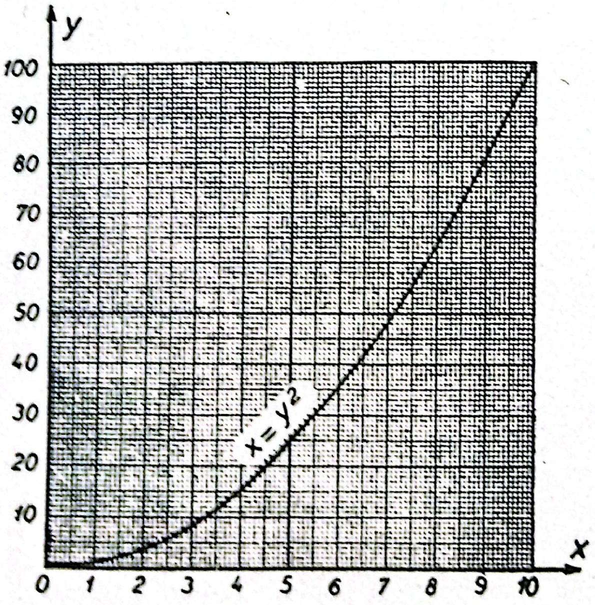


Fig. 102. — Representación de la curva parabólica.

En la técnica se emplean los tres tipos de papeles para gráficos, eligiéndose en cada caso el que convenga para simplificar el trazado de los gráficos que representan funciones. Los correspondientes a funciones lineales, evidentemente usarán papel decimal y los que corresponden a funciones logarítmicas o cuadráticas usarán uno de los papeles logarítmicos que hemos mencionado. Por ejemplo, la hipérbola es una función cuadrática por estar con ese exponente las incógnitas. La ecuación de la hipérbola equilátera tiene las dos incógnitas multiplicadas entre sí. de modo

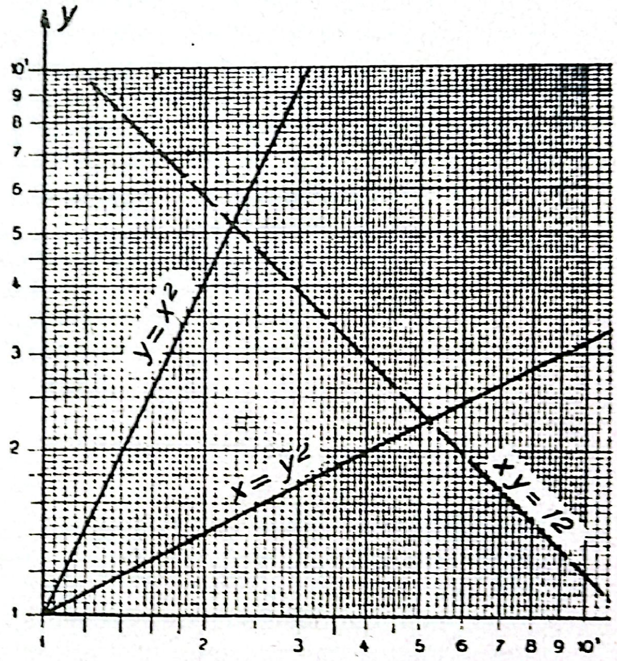


Fig. 103. — Representación lineal de la curva parabólica mediante el papel doble-logarítmico.

que también es una función cuadrática, luego, en el gráfico de la figura 103 debemos obtener una recta. En efecto, hemos representado con línea de trazos la hipérbola equilátera de ecuación:

$$x\,y = 12$$

como ejemplo, y se ve que su gráfica es una línea recta.

Día 14

De todos los temas que hemos abordado hasta ahora no podríamos decir cual es el más interesante, pero sí puede afirmarse que a medida que avanzamos en el curso ha aumentado la complejidad del desarrollo del mismo. Especialmente a partir de la décima jornada los temas han resultado menos conocidos, más profundos y en la primera lectura habrán desanimado a algún lector. Sin ánimo de sembrar pesimismo, advertimos que abordaremos ahora un tema de mayor complejidad que puede considerarse como perteneciente a las Matemáticas superiores; claro está que mantendremos en su desarrollo el nivel que corresponde a este libro, es decir que limitaremos el tratamiento del cálculo diferencial a sus temas fundamentales. Con esto daremos a los lectores la oportunidad de entender procesos matemáticos que encontrará en los libros técnicos y demostraciones que se omiten en los mismos por considerarlas conocidas. De no haber procedido así se necesitaría un libro completo dedicado al tema, pero no debemos olvidar que hemos destinado el presente curso a la explicación sintetizada de lo que puede considerarse como Matemáticas básicas en su planteo y como herramienta auxiliar en las materias técnicas. Por tal razón haremos las demostraciones de algunos de los desarrollos y no de todos los casos, puesto que nos interesa el método operativo más que la justificación de que es correcto. La tabla que se ofrece en este capítulo sin la deducción de sus resultados tiene esa finalidad, es decir prestar utilidad a los lectores que la acepten por buena.

CALCULO INFINITESIMAL — A) CALCULO DIFERENCIAL

La sola lectura del título del presente capítulo puede formarnos una falsa idea de su contenido, ya que no se trata de realizar operaciones con cantidades muy pequeñas, dimensiones microscópicas, sino de resolver problemas matemáticos para los cuales se analizan en el procedimiento deductivo tales cantidades, pero no se las emplea en los cálculos. Para dar una idea de lo que se quiere decir, supongamos que se desea medir la longitud exacta de una curva, tal como lo muestra la figura 104. Si empleamos en la medición una unidad o patrón de medida como el indicado con (a), el resultado será bastante diferente a la verdadera longitud, ya que al colocar la regla (a) a partir del punto A, abarcará hasta el B, luego desde B hasta C, etc. La longitud del tramo AD, la tomaremos como tres unidades (a) y en realidad la curva es más larga. Si usamos una unidad más pequeña, como la (b), que sea aproximadamente la mitad de (a) vemos enseguida que en el tramo AC la nueva medida básica entra cinco veces, mientras que la (a) entraba dos veces. Si seguimos reduciendo la longitud de la unidad de medición, la (c) nos proporcionará un resultado

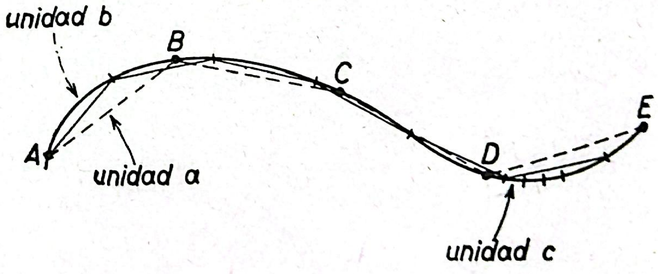


Fig. 104. — Para medir la longitud de una curva se necesita utilizar una unidad de medida lo más pequeña posible.

que se acercará bastante a la longitud real de la curva, pero para llegar a una exactitud perfecta, la unidad de medida debe tener una longitud tan pequeña que equivalga a la dimensión de un punto; esto es porque la curva es una sucesión infinita de puntos.

Ya tenemos idea del concepto de las cantidades infinitésimas, en este caso aplicadas a la determinación de longitudes, pero también se usan para superficies, volúmenes y cualquier magnitud física que interese. No necesitaremos realizar una cantidad infinitamente grande de mediciones o cálculos, con cantidades infinitamente pequeñas; precisamente el cálculo infinitesimal nos permitirá realizar esa clase de operaciones en forma simple, reemplazando la sumatoria de una cantidad muy grande de sumandos por una ecuación que nos dé directamente el resultado. Eso es el cálculo infinitesimal y de él nos interesa únicamente lo que necesitará el lector para entender los libros técnicos; para cumplir con tal objetivo debemos dejar de lado una cantidad de desarrollos y demostraciones que quedan para los estudiantes de Matemáticas. Claro, la explicación completa, detallada y demostrada de todos los temas que comprende el Cálculo Diferencial, requeriría un libro entero o varios y nosotros debemos contentarnos con un capítulo; pero trataremos de que lo que él contenga alcance para cumplir con nuestro objetivo.

141. — Concepto de límite

En el capítulo anterior tuvimos oportunidad de definir los conceptos de *variable* y de *función*. Ahora debemos agregar el concepto de *límite*, y diremos que es el valor que adquiere una función cuando la variable independiente llega al valor por el cual manifiesta tendencia a alcanzar. La definición es clara, pero algunos ejemplos nos permitirán penetrar mejor en ese concepto. Hemos escrito la expresión general de una función como dependiente de una variable, en la siguiente forma:

$$y = f(x)$$

y ahora diremos que la tendencia natural de x es crecer hasta el infinito, ya que no conocemos limitaciones a esa tendencia. Entonces, mientras no se especifique lo contrario, supondremos que la tendencia de una variable independiente es alcanzar un valor infinito, cosa que se escribe así:

$$x \to \infty$$

y habrá que determinar cuál es el valor que alcanzará la función y cuando la variable x alcance ese valor límite. A tal valor de la función se lo llama *límite*, y se escribe así:

$$\lim f(x) \text{ para } x \to \infty$$

o también, como lo veremos en algunos libros:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

142. — Determinación del límite

Veamos ahora, los ejemplos prometidos que nos aclararán mejor la definición y el concepto del límite de una función. Escribamos:

$$\lim \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{si } x \to \infty$$

que es evidente, pues a medida que el valor de x crece, la función dada, que lleva la variable en el denominador, se reduce y en su valor límite, cuando x alcance el valor infinito, la función valdrá cero. Similar es el caso de una función un poco menos simple, como:

$$\lim \frac{a}{1 + x^2} = 0 \qquad \text{si } x \to \infty$$

ya que al aumentar x el valor de la función se va reduciendo y en el límite, cuando x alcance el valor infinito, el quebrado vale cero. Del mismo modo se deduce que:

$$\lim a^x = \infty \qquad \text{si } x \to \infty$$

y así se pondrían numerosos ejemplos similares. Veamos alguno que presente la oportunidad de razonar para encontrar el valor límite de la función. Sea la función:

$$y = \frac{x - 1}{x}$$

de la cual deseamos determinar el límite cuando x tiende a infinito; en apariencia, es un valor indeterminado, porque nos quedaría un cociente de dos cantidades infinitas, pero si damos valores a x y calculamos el valor de la función para los mismos, se tiene el siguiente cuadro:

$x =$	1	2	3	...	100
$f(x) =$	0	0,5	0,66		0,99

Y podemos deducir, con facilidad, que el límite de nuestra función será la unidad, escribiendo:

$$\lim \frac{x - 1}{x} = 1 \qquad \text{si } x \to \infty$$

Veamos otro ejemplo en el cual debemos razonar para encontrar el límite de la función, la cual está dada por la expresión:

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

De esta función deseamos conocer su valor límite cuando x tiende a cero. Si reemplazamos directamente a la letra x por cero, nos da una cantidad indeterminada, pues sería cero sobre cero; eso no está bien, de modo que demos valores a x y determinemos los que adquiere la función. Se supone que x es la medida del arco expresado en radianes (ver capítulo 6, sección 53). El cuadro de valores sería:

x° =	5°	2°	1°
x (rad.) =	0,08729	0,03491	0,017453
sen x =	0,08716	0,03490	0,017452
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ =	0,9987	0,99971	0,99994

Y ya se ve claramente que el límite de la función será igual a la unidad, es decir que:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{si } x \to 0$$

Y también puede demostrarse, por un procedimiento similar, que:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} k x}{x} = k \qquad \text{si } x \to 0$$

porque una cantidad constante que afecta a la función como factor queda en el resultado con su mismo valor. En efecto, bastaría multiplicar numerador y denominador de la función por la constante k, y tendríamos:

$$y = \frac{k \operatorname{sen} k x}{k x} = k \frac{\operatorname{sen} k x}{k x}$$

y el límite del quebrado será siempre la unidad, con lo que esa unidad multiplicada por la constante da por resultado el valor de la constante.

Otras veces es menester recurrir a artificios algebraicos para establecer el valor del límite de una función, porque si dejamos la expresión de la misma en la forma propuesta, se llega a determinaciones inciertas. Sea por ejemplo la función:

$$y = \frac{2 x^2 + 3 x - 5}{3 x^2 - 4 x + 2}$$

de la cual se desea determinar el límite, cuando:

$$\lim y \qquad \text{si } x \to \infty$$

Y vemos de inmediato que tanto el numerador como el denominador tienden a valores infinitos, con lo que nos quedará un indeterminado. Pero si dividimos numerador y denominador por el cuadrado de x se tiene:

$$\lim \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2}{3} \qquad \text{si } x \to \infty$$

resultado fácil de demostrar, pues los quebrados encima y debajo de la raya divisoria tienden a cero y nos quedan solamente los términos constantes.

Los ejemplos anteriores podrían complementarse con muchos otros, pero debemos aclarar que la determinación de límites es una operación matemática completamente auxiliar, y que para nuestro objetivo sólo es necesario comprender su concepto y mecanismo, a efecto de aplicarlo en la determinación de las derivadas de funciones, tema que nos ocupará más adelante. No obstante, es conveniente dar las normas generales o reglas prácticas para la determinación de los límites de funciones. Esas reglas son:

1) El límite de una constante es la misma constante.

2) El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de cada función, siempre que la cantidad de sumandos sea una cifra finita y no infinita.

3) El límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de cada función, siempre que la cantidad de factores sea finita.

4) El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites del numerador y denominador, siempre que el denominador no tenga límite igual a cero.

143. — Concepto gráfico del límite

Muchas veces debe determinarse el límite de una función matemática que está basada en una representación gráfica. Por ejemplo, en Geometría hemos siempre definido a la tangente a una curva como la recta que tenía un solo punto de contacto con dicha curva; si generalizamos esa definición y la queremos aplicar en el caso de la figura 105, veremos que la recta que es tangente a la curva en el

Derivada de una función simple. Tomemos como función simple a la que está dada por la variable elevada a una potencia numérica; comencemos por la función:

$$y = x$$

sin necesidad de demostración alguna, llegamos a que la derivada vale:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 1$$

puesto que los incrementos serán siempre iguales.

Tomemos ahora la función:

$$y = x^2$$

y determinemos la derivada. Primero calculemos el incremento de la función:

$$\begin{aligned} \triangle y &= (x + \triangle x)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2x \triangle x + \triangle x^2 - x^2 \\ &= 2x \triangle x + \triangle x^2 \end{aligned}$$

y ahora hagamos el cociente de incrementos:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2x \triangle x + \triangle x^2}{\triangle x} = 2x + \triangle x^2$$

y llevemos al límite la expresión anterior cuando el incremento de la variable tiende a cero; lógicamente ese límite nos da el valor de la derivada, en la cual se elimina el término del incremento de x al cuadrado:

$$\frac{d x^2}{d x} = 2x$$

Realizando similares operaciones para otros valores del exponente de la variable llegaríamos a resultados en los cuales la derivada es igual a la variable elevada a un exponente que es una unidad menor que el primitivo y afectada por un coeficiente que es numéricamente igual al exponente primitivo. Luego, podemos escribir, en general, que la derivada de una función que está dada por la variable elevada a un exponente numérico es:

$$\frac{d x^n}{d x} = n x^{n-1}$$

Derivada de una función simple con exponente fraccionario. Si la variable está elevada a una cierta potencia pero al mismo tiempo está afectada por una operación de radicación, se puede demostrar, pero saldríamos del objetivo de este libro, que la derivada se determina con la expresión:

$$\frac{d \sqrt[n]{x^m}}{d x} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}$$

o sea que el factor numérico es el cociente entre la potencia y el índice de la raíz, y la variable queda elevada a una potencia que es la diferencia entre esos mismos números. En el caso particular de que se trate de una raíz cuadrada, la expresión anterior se simplifica:

$$\frac{d \sqrt{x}}{d x} = \frac{1}{2 \sqrt{x}}$$

147. — Tabla de derivadas resueltas

Se puede calcular y demostrar que está bien cualquier ejemplo de determinación de derivadas de funciones, pero en la práctica es más cómodo disponer de un cuadro que suministre las derivadas de las funciones más comunes, de modo que cuando se presenta alguno de los casos tabulados se tiene ya la solución. Por tal motivo ofrecemos la tabla adjunta que contiene los casos que encontraremos en los libros técnicos.

Función	Derivada
$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx}$
sen x	cos x
cos x	— sen x
tg x	$1 + \text{tg}^2 x$
sen $k x$	k cos $k x$
sen$^2 x$	sen $2x$
$\log_e x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Derivada de la suma de funciones. Si se tienen diferentes funciones de una misma variable y aparecen sumadas, la derivada de la suma de esas funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función. Por ejemplo, si u es una función dada de la variable x, otra función distinta es v y otra es z, la suma de ellas

$$y = u + v + z$$

tiene por derivada a la suma de las derivadas de cada función, o sea:

$$y' = u' + v' + z'$$

o escribiendo lo mismo con la notación que hemos empleado ya varias veces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

Lo cual se pondrá más en claro con un ejemplo. Supongamos que todas las funciones sean simples, y que se tenga la suma de funciones:

$$y = x^3 + 3x^4 - \frac{x^2}{4}$$

donde se ve cuáles son las tres funciones distintas de la variable x. Procediendo como se indicó, se calcula la derivada de cada función:

$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{d\,3x^4}{dx} = 12x^3$$

$$\frac{dx^2/4}{dx} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

Y entonces la derivada de la suma de funciones, que es la suma de las derivadas encontradas, vale:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x^3 - 0{,}5\,x$$

Con la aclaración que el signo negativo del último término nos sirve para aclarar que la suma se considera como algebraica, es decir que puede tener signos positivos o negativos. Dicho de otra manera, hemos planteado el caso de la derivada de la suma y de la resta de funciones, que se resuelven de idéntica manera.

Derivada del producto de funciones. Si se tienen dos funciones, cada una de las cuales está referida a la misma variable, o sea:

$$y = u\,v$$

siendo u y v diferentes funciones de la variable x, la derivada de y se calcula mediante la suma de dos términos dados por los productos de la derivada de una función multiplicada por la otra función, o sea:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Método que quedará mejor explicado con un ejemplo numérico. Sean las dos funciones de x:

$$y = u\,v$$

cuyo producto de funciones está integrado por u y v, cuyos valores son:

$$u = \operatorname{sen} x$$

$$v = \log_e x$$

La derivada del producto se resuelve con la expresión ya vista, tomando las derivadas de cada función de la tabla de la sección 147:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x\,\frac{1}{x} + \log_e x \cos x$$

Derivada del cociente de funciones. Si se tienen dos funciones de una misma variable, y ambas aparecen como un cociente, la derivada del mismo se determina por la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}$$

La cual quedará mejor aclarada con un ejemplo numérico. Sean las dos funciones de x

$$u = \operatorname{sen} x$$

$$v = \sqrt{x}$$

y deseamos determinar la derivada del cociente entre ellas, o sea de:

$$y = \frac{u}{v}$$

Usando la tabla de derivadas, sección 147, y reemplazando los valores en la expresión que da la derivada de un cociente se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}\cos x - \operatorname{sen} x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

Resultado que admite algunas simplificaciones algebraicas, pero las mismas no son, por el momento, nuestro objetivo.

148. — Ejemplo práctico de derivadas

Utilizando todas las explicaciones dadas, resolveremos un caso concreto de cálculo de derivadas para poder apreciar su utilidad. Sea una parábola cuya ecuación conocemos y queremos trazar una tangente a la misma por un punto dado, que está, lógicamente, sobre la curva. Sabemos que la derivada de la ecuación de la curva es la pendiente de la tangente

punto A tiene más de un punto de contacto con la curva, ya que en el mismo gráfico los puntos B y C son puntos de encuentro o más bien de intersección, y entonces nuestra definición falla.

Para definir correctamente a la tangente a una curva en un punto de la misma, veamos la figura 106, en la cual se toma una secante que pasa por el punto dado A y que corta a la curva en otro punto B. Si acercamos el punto B hacia el A, tendremos los puntos C, D, etc. Si la posición del punto B tiende a la del A el límite de la secante es la tangente en

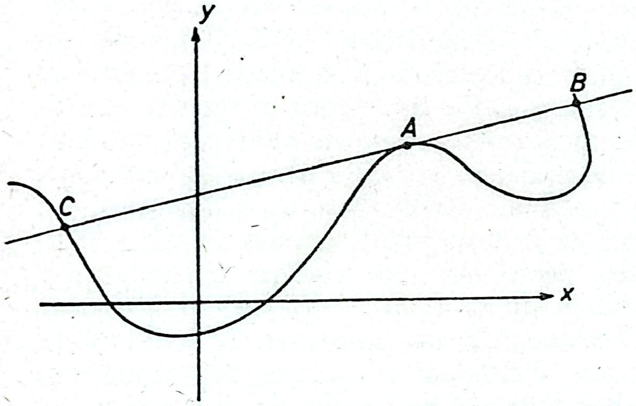


Fig. 105. — La definición geométrica de la tangente es incorrecta.

A. El concepto de límite nos ha permitido dar una definición más correcta de la tangente a una curva.

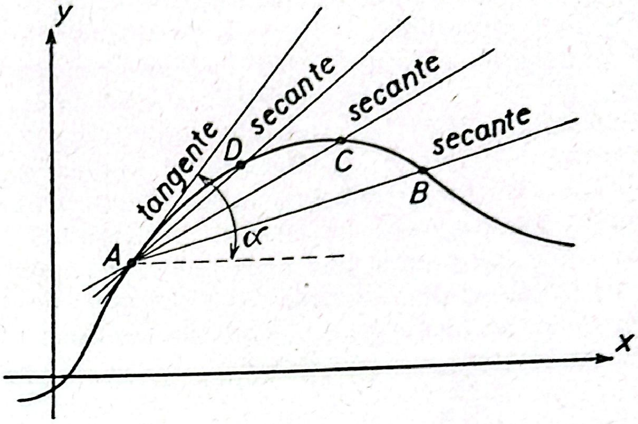


Fig. 106. — La definición analítica de la tangente.

144. — Concepto de incremento

Una función matemática cualquiera representa una figura geométrica que admite una versión gráfica; ella puede ser una línea recta o curva, abierta o cerrada, contenida o no en un plano, o también un cuerpo geométrico. En nuestro estudio nos hemos limitado a las figuras en el plano según lo que se explicó en el capítulo 13. Por ejemplo la curva que vemos en la figura 107 es la representación gráfica de una función:

$$y = f(x)$$

en cuya expresión x es la variable independiente; para cada valor de x puede haber uno o más valores de y, ya que si aparece una raíz cuadrada habrá dos raíces o soluciones, etc.

Sobre la curva de la figura 107 tomemos un punto cualquiera A de coordenadas x e y. Complementariamente fijemos un segundo punto B, muy próximo al A, cuyas coordenadas serán, en general, diferentes a las anteriores, y las llamamos x_1 e y_1. Destaquemos que en el dibujo los puntos A y B aparecen bastante alejados, si se considera que hemos puesto la condición de que deben estar muy próximos, pero entonces no podríamos escribir las indicaciones correspondientes a ambos puntos.

Bien, llamaremos *incremento* de la variable independiente a la medida horizontal:

$$\Delta x = x_1 - x$$

la cual se ha indicado en la figura 107. Este incremento en la variable se traduce en un incremento de la función, dado por:

$$\Delta y = y_1 - y$$

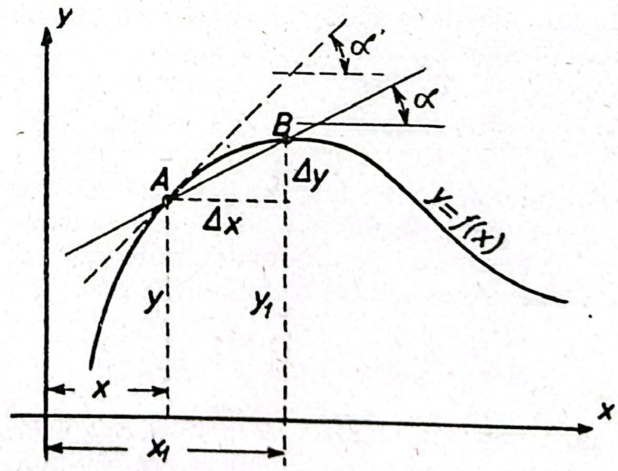


Fig. 107. — Definición de la derivada de una función.

que también está indicado en la figura 107, y que puede ser escrito de otra manera, ya que la función genéricamente se expresa referida a la variable:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

expresión que, como es evidente, es equivalente a la anterior.

Volviendo a la figura 107, vemos que los dos incrementos, el de la variable y el de la función, forman los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento AB, que no es otra cosa que la secante a la curva que pasa por esos puntos. Esta secante tiene una pendiente, que es la tangente trigonométrica del ángulo alfa, y que se puede determinar mediante el cociente de los incrementos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} =$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O sea que la pendiente de la secante a la curva está dada por el cociente de los incrementos de la función y de la variable.

145. — Concepto de derivada

Recordando la definición dada para la tangente a una curva al ocuparnos de la figura 106 y llevando el caso a la figura 107, podemos definir a la pendiente de la tangente a la curva en el punto A como el límite de la pendiente de la secante; tal límite se llama *derivada* de la función. Más concretamente diremos que la derivada de una función es igual al límite del cociente de incrementos de función y variable, cuando el incremento de la variable tiende a cero; el ángulo de la tangente lo llamamos α' y escribimos:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } \Delta x \to 0 \qquad \text{(a)}$$

Debiendo aclararse que la *derivada* de una función puede escribirse, adoptando notaciones matemáticas, de diferentes maneras, que consideraremos iguales o equivalentes:

$$\operatorname{tg} \alpha' = f'(x) = \frac{d\, f(x)}{d\, x} = \frac{d\, y}{d\, x}$$

Una vez que se ha determinado el valor matemático general de la derivada de una función, se encuentra su valor numérico reemplazando a la variable independiente por la abscisa del punto que se considera y para el cual se desea conocer la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto. Por ejemplo, tenemos la ecuación de la curva de la figura 107, que es una función matemática; calculamos la derivada por el método que aprenderemos de inmediato y llegamos a una nueva expresión que da el valor de la pendiente de la tangente a la curva en un punto cualquiera. Luego, fijamos el punto A mediante sus coordenadas y reemplazando el valor particular de x en la ecuación que da la derivada encontramos la pendiente de la tangente a la curva en A, o sea el valor:

$$\operatorname{tg} \alpha' = f'(x) \qquad \text{para el punto } A$$

146. — Cálculo de la derivada

El cálculo de la derivada de cualquier función matemática se puede hacer siempre partiendo de la expresión (a) dada más arriba, es decir encontrando el límite del cociente de incrementos. En la práctica se recurre al procedimiento más rápido de confeccionar tablas de derivadas ya resueltas para ahorrar tiempo, de modo que ofreceremos oportunamente una tabla de derivadas de funciones comunes. Pero antes determinaremos algunas derivadas que servirán de ejemplo y orientación al lector.

Derivada de una constante. Si una función es una constante, es porque representa una recta paralela al eje de abscisas, según lo muestra la figura 108. En efecto, para cualquier

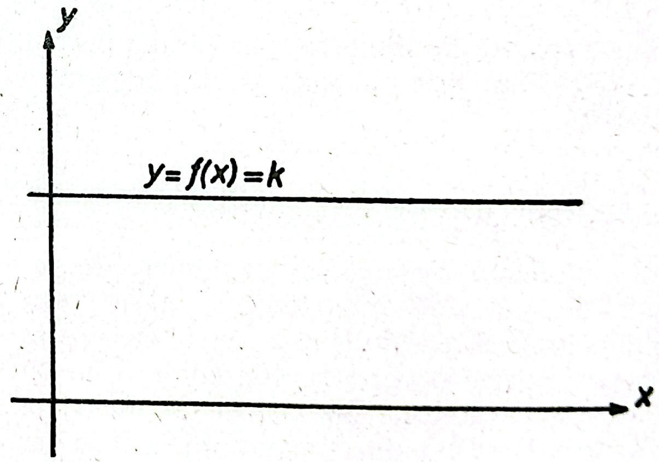


Fig. 108. — La derivada de una constante es nula.

valor de x la ordenada y vale siempre lo mismo, una constante que podemos denominar k. Si calculamos la derivada haciendo el cociente de incrementos:

$$f'(x) = \frac{d\, k}{d\, x} = 0$$

es decir que *la derivada de una constante es nula*, porque lo es el incremento de la función, o sea que $d\, k = 0$ y lógicamente lo será el cociente y su límite.

geométrica en un punto de la curva, y si ponemos en la expresión de la derivada los valores de las coordenadas del punto dado, tendremos la pendiente de la tangente en ese punto.

La ecuación dada de nuestra parábola sea:

$$y^2 = 4x$$

y el punto por el cual le trazamos la tangente sea:

$$A\ (4\,;4)$$

Con ayuda de lo que estudiamos en el capítulo 13 podemos dibujar la parábola y marcar sobre ella el punto A, cosa que vemos en la figura 109. Ahora debemos determinar la de-

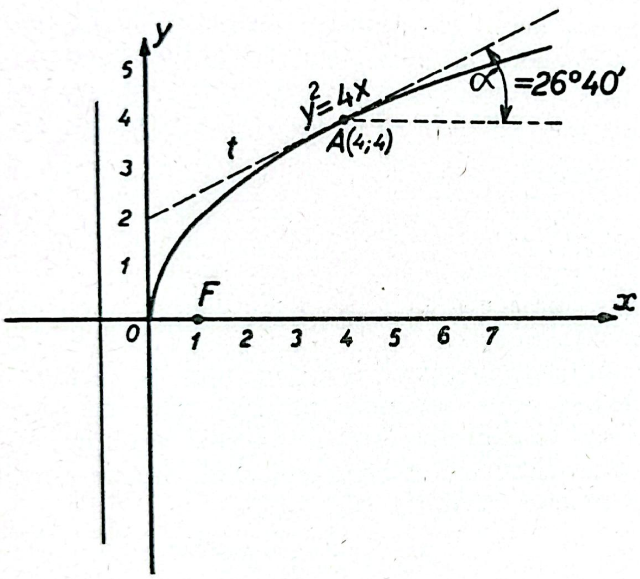


FIG. 109. — Trazado de la tangente a una parábola.

rivada de la función dada, o sea de la ecuación de la parábola, previa una operación que despeje el valor de y:

$$y^2 = 4x$$

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Valor que se encontró mediante la tabla de derivadas resueltas y sus anexos. Ahora, como nos interesa la tangente que pasa por A, ponemos la abscisa de ese punto en la expresión de la derivada y encontramos:

$$\text{para } x_1 = 4 \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}5$$

Con este valor de la pendiente y las tablas trigonométricas, determinamos que el ángulo que forma esa tangente con el eje horizontal es de 26° 40'. Para completar la recta podemos calcular la ordenada al origen, y como sabemos que (sección 131):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

en cuya expresión podemos reemplazar:

$$y_2 = 4 \qquad y_1 = q$$

$$x_2 = 4 \qquad x_1 = 0$$

Con lo que se tiene:

$$\frac{4 - q}{4} = 0{,}5$$

y deducimos de inmediato, mediante el Algebra:

$$q = 2$$

que es el valor de la ordenada al origen.

El ejemplo tratado nos permite escribir la ecuación general de la tangente a una curva dada por una función $y = f(x)$. En efecto, la deducimos de la expresión que da la pendiente:

$$y - y_1 = f'(x)\ (x - x_1)$$

149. — Derivada de una función de función

Se presenta muchas veces en la práctica que la función no está dada directamente referida a la variable independiente sino que se interpone una operación matemática entre ambas, de tal modo que la variable independiente es función de un carácter tal que aparece una segunda función o función intermedia. Por ejemplo, si se tiene una función:

$$z = F\ (x)$$

la misma puede aparecer como variable en otra función:

$$y = f\ (z)$$

y entonces puede escribirse ese conjunto matemático de esta manera:

$$y = f[F\ (x)]$$

Tal planteo matemático puede ser ocasional o intencional; en efecto, a veces se reemplaza una función directa cuya determinación no es posible o es muy complicada por una función de función. Nuestro problema, en este momento es determinar la derivada de una

geométrica en un punto de la curva, y si ponemos en la expresión de la derivada los valores de las coordenadas del punto dado, tendremos la pendiente de la tangente en ese punto.

La ecuación dada de nuestra parábola sea:

$$y^2 = 4x$$

y el punto por el cual le trazamos la tangente sea:

$$A\ (4\,;4)$$

Con ayuda de lo que estudiamos en el capítulo 13 podemos dibujar la parábola y marcar sobre ella el punto A, cosa que vemos en la figura 109. Ahora debemos determinar la de-

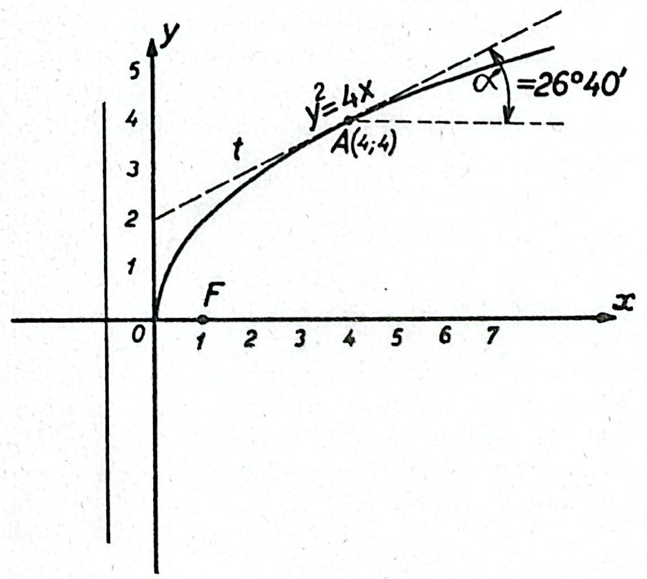


Fig. 109. — Trazado de la tangente a una parábola.

rivada de la función dada, o sea de la ecuación de la parábola, previa una operación que despeje el valor de y:

$$y^2 = 4x$$

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Valor que se encontró mediante la tabla de derivadas resueltas y sus anexos. Ahora, como nos interesa la tangente que pasa por A, ponemos la abscisa de ese punto en la expresión de la derivada y encontramos:

$$\text{para } x_1 = 4 \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}5$$

Con este valor de la pendiente y las tablas trigonométricas, determinamos que el ángulo que forma esa tangente con el eje horizontal es de 26° 40'. Para completar la recta podemos calcular la ordenada al origen, y como sabemos que (sección 131):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

en cuya expresión podemos reemplazar:

$$y_2 = 4 \qquad y_1 = q$$

$$x_2 = 4 \qquad x_1 = 0$$

Con lo que se tiene:

$$\frac{4 - q}{4} = 0{,}5$$

y deducimos de inmediato, mediante el Algebra:

$$q = 2$$

que es el valor de la ordenada al origen.

El ejemplo tratado nos permite escribir la ecuación general de la tangente a una curva dada por una función $y = f(x)$. En efecto, la deducimos de la expresión que da la pendiente:

$$y - y_1 = f'(x)\ (x - x_1)$$

149. — Derivada de una función de función

Se presenta muchas veces en la práctica que la función no está dada directamente referida a la variable independiente sino que se interpone una operación matemática entre ambas, de tal modo que la variable independiente es función de un carácter tal que aparece una segunda función o función intermedia. Por ejemplo, si se tiene una función:

$$z = F\ (x)$$

la misma puede aparecer como variable en otra función:

$$y = f\ (z)$$

y entonces puede escribirse ese conjunto matemático de esta manera:

$$y = f[F\ (x)]$$

Tal planteo matemático puede ser ocasional o intencional; en efecto, a veces se reemplaza una función directa cuya determinación no es posible o es muy complicada por una función de función. Nuestro problema, en este momento es determinar la derivada de una

función de función, y se hace así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Ejemplo 1: Sea la función de función que tiene un binomio elevado a cierta potencia:

$$y = (4x + 2)^3$$

de la cual queremos calcular la derivada. Podemos escribir, según la expresión de la derivada de la función de función que vimos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(4x+3)^3}{dx} =$$

$$= \frac{d(4x+3)^3}{d(4x+3)}\frac{d(4x+3)}{dx}$$

y resolviendo las derivadas conocidas, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = (3(4x+3)^2)(4) =$$

$$= 12(16x^2 + 9 + 24x) =$$

$$= 192x^2 + 288x + 108$$

que resultó, como se ve, una ecuación de segundo grado, y que es la derivada de la función de función dada.

Ejemplo 2: Tomemos otra función de función de la cual debemos calcular la derivada. Sea:

$$y = \mathrm{sen}^2 x$$

y la derivada, determinada con la expresión dada más arriba es:

$$\frac{d\,\mathrm{sen}^2 x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{sen}^2 x}{d\,\mathrm{sen}\,x}\frac{d\,\mathrm{sen}\,x}{dx}$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$

que por Trigonometría (sección 84), sabemos que es igual a:

$$2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,2x$$

y que es la derivada de la función de función propuesta. En esta forma se calculan las derivadas de las funciones de función que se presenten en la práctica.

150. — Concepto de diferencial

Hay un concepto muy importante en Matemáticas que se vincula a la derivada de una función, y es la *diferencial.* Se la define como el producto de la derivada de la función por el incremento de la variable independiente y en forma gráfica, si volvemos a la figura 107, le asignamos el segmento infinitésimo dy, que es el límite del incremento de la función.

Si escribimos mediante las notaciones matemáticas la definición de la diferencial, tenemos:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

que aparece como una identidad, si quisiéramos simplificar en el segundo miembro las cantidades iguales en numerador y denominador, pero debemos advertir que hay que dejar la expresión tal como se ha escrito, o, para evitar una interpretación algebraica pura, conviene escribirla así:

$$dy = f'(x)\,dx$$

Y entonces aparece bien definido el método para determinar la diferencial de una función: hay que hallar la derivada y multiplicarla por el incremento de la variable. Resulta evidente que para calcular las diferenciales de las funciones que se presentan en la práctica no hace falta que demos expresiones y ejemplos, pues son válidos todos los que hemos visto para las derivadas; no hay más que multiplicar el resultado por dx.

Día 15

Estamos llegando al final de nuestro programa y el lector que nos ha seguido con dedicación ya está en condiciones de interpretar una gran cantidad de libros que antes dejaba de lado. Falta solamente una jornada, una de las más interesantes de nuestra labor, que será dedicada al cálculo integral. Muchas veces hemos oído hablar de la integración matemática y la idea la hemos vinculado mentalmente con el significado popular de la palabra; lo notable es que esa vinculación está muy cerca de la verdad, pues la integración matemática consiste en reunir una gran cantidad de cantidades muy pequeñas, tal como si se aglomerara mediante un prensado una cantidad de partículas de polvo para formar un cuerpo. Y bien, hemos aprendido a desmenuzar cantidades, a convertir funciones en cantidades infinitésimas; ahora explicaremos la forma de sumar esos infinitésimos para tener una cantidad grande otra vez.

Cabe hacer la advertencia de que no es posible que el tema sea desarrollado con la extensión que requiere, ya que hay libros enteros dedicados al mismo; aquí sólo hablaremos de los fundamentos, resolveremos algunos ejemplos sencillos y guiaremos al lector para ayudarlo a interpretar libros técnicos que tienen desarrollos de cálculo integral. Ese es el objetivo que nos hemos señalado en todo el libro y que consideramos que se ha alcanzado, si los lectores han seguido las explicaciones y han repasado todo aquello que no fue entendido en la primera lectura.

CALCULO INFINITESIMAL — B) CALCULO INTEGRAL

151. — Concepto de integración

La *integración* es una operación matemática que consiste en calcular el área encerrada por un arco de curva y que no puede resolverse con las fórmulas simples de la Geometría. El método puede ser extendido al cálculo de volúmenes, longitudes de curvas, porciones de áreas y otras magnitudes que se necesitan en la técnica, pero el principio operativo lo explicaremos para la definición básica que se ilustra en la figura 110.

Tenemos una curva cualquiera, indefinida en ambas direcciones, que está determinada por una ecuación matemática, o sea la función:

$$y = f(x)$$

Se toma una porción AB de la curva y se desea determinar el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las dos verticales bajadas por los puntos A y B. Las abscisas de la curva son los valores de la variable independiente x y de todos los valores posibles, interesan especialmente dos, que son los que determinan los extremos del segmento AB; tales valores son:

$$x = a \quad \text{y} \quad x = b$$

La operación de integración consiste en calcular el área $aABb$; si dividimos ese área en franjas de espesor infinitésimo dx, cada franja será un rectángulo cuya superficie estará comprendida entre el rectángulo mayor, de base dx y altura $(y + dy)$ y el menor, de base dx y altura y. Extremando la división en franjas llegamos al límite de la misma, cuando los dos rectángulos mencionados se hacen iguales y entonces podemos escribir la operación de sumar todas las franjas de espesor infinitésimo mediante el símbolo de *integración*, que se llama *integral:*

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

Y leemos lo anterior diciendo que el área bus-

cada es la integral desde el valor a hasta el valor b de la abscisa, de la diferencial de la función dada; tal función no es otra cosa que la ecuación de la curva. Rápidamente diremos que debemos integrar esa diferencial desde a hasta b. Y cabe aclarar que tal operación representa una *integral definida*, que es lo mismo que decir *limitada*, ya que se especifican los extremos entre los cuales se considera la función.

152. — Cálculo de la integral indefinida

Supongamos que la función de que hemos hablado sea matemáticamente la derivada de

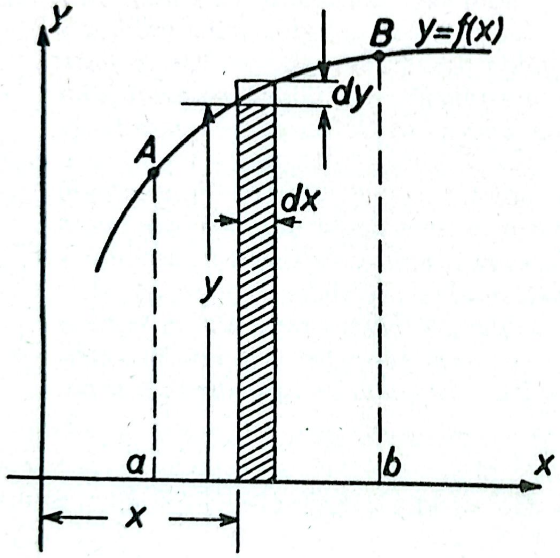


FIG. 110. — Concepto de la integral definida.

otra función de la misma variable, es decir que se cumpla:

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x}$$

O mejor aún, puesto que si la función del segundo miembro tiene sumada una constante, la derivada de la misma es nula y tal constante no aparece en el resultado, podemos poner, como más general, que se tenga:

$$f(x) = \frac{d\,[F(x) + C]}{d\,x}$$

Y ahora, si calculamos las diferenciales de ambos miembros, tenemos:

$$f(x)\,dx = d\,[F(x) + C]$$

Y si integramos las diferenciales se obtiene:

$$\int f(x)\,d\,x = F(x) + C$$

Identidad fácilmente explicable, puesto que en el segundo miembro la integración de todos los infinitésimos en que se ha dividido a una función, no es otra cosa que la función entera.

La expresión anterior nos dice que una *integral indefinida* de una función que es igual al valor de la derivada de otra que llamaremos *primitiva*, es igual a esa función primitiva más una constante de integración. O sea que si $f(x)$ es la derivada de $F(x)$, la integral de la diferencial de la primera es igual a la segunda, más la constante C cuyo valor sabremos calcular.

153. — Cálculo de la integral definida

Volvamos a la figura 110 en la cual queríamos determinar el área encerrada por parte de la curva y el eje horizontal, o sea el área $aABb$. De aquí sacaremos los elementos de juicio para determinar el valor de la constante de integración. Tomemos como ambos extremos de integración el mismo punto A de tal modo que la variable x vale a para los dos límites de integración, con lo cual el área considerada es nula; es decir que al resultado de la integral lo igualamos a cero:

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C = 0$$

donde hemos puesto $F(a)$ en lugar de $F(x)$ porque el valor de la abscisa es a en ese caso. De la segunda parte de la expresión anterior deducimos el valor de C:

$$C = -F(a)$$

Ahora tomemos la integración partiendo del punto A hasta el punto corriente en que la abscisa vale x, y pondremos en lugar de C su valor hallado:

$$\int_a^x f(x)\,d\,x = F(x) - F(a)$$

que para el caso concreto de poner para x el valor del final del segmento que se considera, tenemos la integración definida, y el resultado es:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = F(b) - F(a)$$

que también puede escribirse así:

$$= \Big[F(x) \Big]_a^b$$

Y entonces llegamos a que el cálculo de la integral definida de una diferencial de una función, se realiza encontrada la primitiva de esa función, y haciendo la diferencia entre el valor de tal primitiva que resulta para el valor final de la variable y el que resulta para el valor inicial de la variable. La frase aparece como complicada pero en los ejemplos prácticos veremos que la interpretación de la misma es simple. También conviene destacar que hay que disponer de una tabla de funciones primitivas de las funciones más comunes, aunque como el lector ya lo habrá adivinado, la tabla de derivadas de la sección 147 sirve, puesto que no hay más que usarla al revés; en efecto, si una función es derivada de otra, ésta es la primitiva de la primera.

Comencemos por un ejemplo que puede considerarse el más clásico. Si la variable está elevada a un exponente en la primitiva, la derivada se hallaba restando una unidad al exponente y multiplicando a la variable por el exponente anterior. Luego, la integral siguiente vale:

$$\int x^n \, d x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

puesto que si calculamos la derivada del resultado encontramos la función que hay en el primer miembro:

$$\frac{d}{d x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)\, x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$$

Y así con todos los casos, las integrales de las funciones que aparecen en la segunda columna de la tabla de derivadas de la sección 147, son los valores que aparecen en la primera columna. La constante de integración no nos molesta puesto que sabemos cómo se determina su influencia en el resultado, al tratarse de una integral definida. Algunos ejemplos de integración nos servirán para comprobar que el cálculo integral no ofrece complicaciones en los casos sencillos que se presentan en la práctica.

154. — Area limitada por una curva

El ejemplo más clásico de integración es el que propusimos en la figura 110, pero que haremos en forma completa y para un caso concreto. Se trata de calcular el área encerrada por un arco de parábola y el eje de abscisas, con limitación dada por las verticales bajadas por los extremos del segmento de arco que interesa. O sea que limitamos el arco entre las abscisas $x = 2$ y $x = 6$. La parábola tiene por ecuación:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

En la figura 111 se ha trazado la parábola siguiendo las reglas gráficas del capítulo 13,

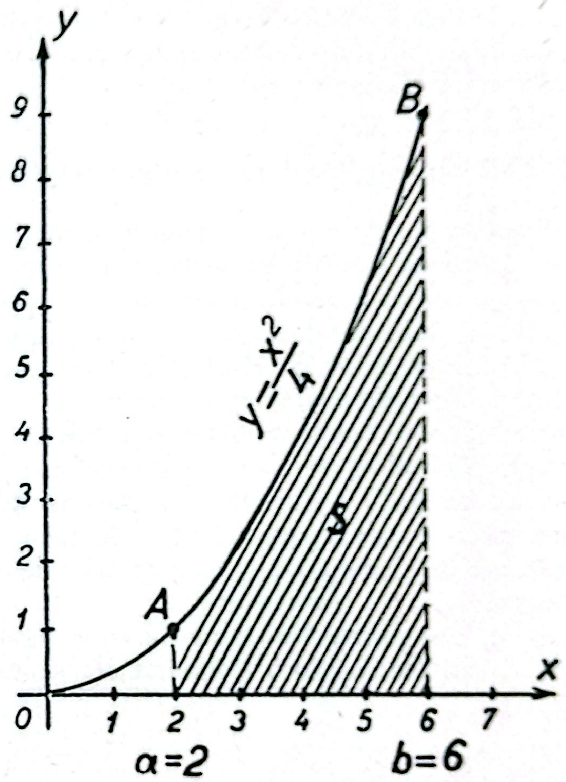


FIG. 111. — Cálculo de la porción de área encerrada por una curva.

sección 139, y se ha rayado el área que debemos calcular. La ecuación de la parábola es la función cuya diferencial debemos integrar entre los límites fijados, es decir que la superficie que nos interesa es:

$$S = \int_a^b f(x) \, d x = \int_a^b \frac{x^2}{4} \, d x$$

La primitiva de esa función la sabemos encontrar, pues no hay más que aumentar una unidad al exponente y dividir por el número igual al nuevo exponente; luego, dar a esa primitiva los valores para los dos límites de la variable y restar ambos; se tiene:

$$S = \frac{b^3}{12} - \frac{a^3}{12}$$

y poniendo en lugar de a y b sus valores de la figura 111:

$$S = \frac{216 - 8}{12} = 17,33$$

El resultado obtenido es una cantidad de unidades de superficie, es decir una cantidad de cuadritos cuyo lado es igual a una unidad lineal medida sobre los ejes. Si se quiere tener esa superficie en unidades métricas habrá que disponer de la escala de longitudes, cuyo cuadrado es la escala de superficies.

155. — Momento estático de una superficie

El concepto de momento estático o de primer orden de una figura plana con respecto a un eje nos dice que es la sumatoria de productos de unidades de superficie de tal figura por las distancias al eje dado. Evidentemente, si disponemos de una función matemática que exprese uno de esos productos elementales, la integración de la función será el momento estático de toda la superficie. Vemos así que este tema, de gran aplicación en la técnica, nos sirve de ejemplo de aplicación del cálculo integral.

Sea el caso particular planteado en la figura 112. Es un rectángulo y deseamos determinar

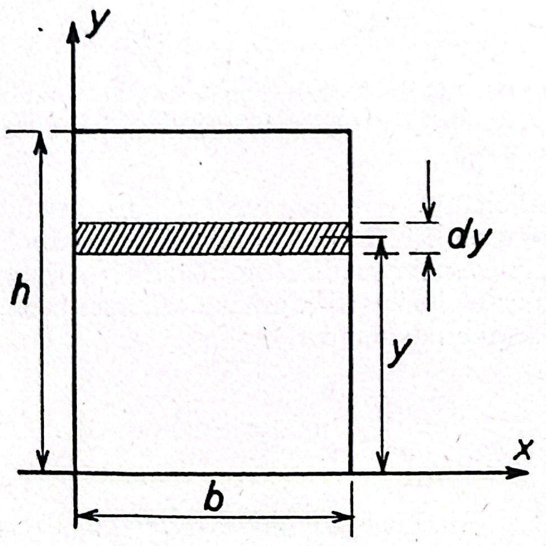


Fig. 112. — Momento estático o de primer orden de un rectángulo respecto de la base.

el momento estático respecto de un eje que coincide con su base. Se ha rayado una superficie elemental, que es una franja de base b y altura dy; la distancia al eje es la variable y.

Luego el momento estático de toda la figura vale:

$$M = \int_0^h b\, y\, dy$$

$$= \left[\frac{b\, y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b\, h^2}{2}$$

puesto que al dar a la primitiva el valor de la variable igual a cero, anulamos el término a restar.

El ejemplo del rectángulo puede parecer demasiado simple, por lo cual daremos otro,

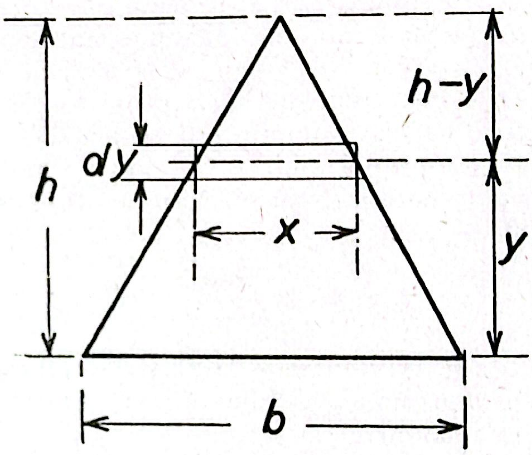


Fig. 113. — Momento estático de un triángulo respecto de la base.

que es el caso planteado en la figura 113. Se trata de calcular el momento estático de un triángulo respecto de un eje coincidente con su base. El momento del área elemental puede escribirse:

$$dM = x\, dy\, y$$

que resulta de la simple observación de la franja rayada en la figura 113; pero el triángulo superior, desde el vértice hasta la franja es semejante (sección 58) al triángulo completo, de modo que se puede establecer la proporción:

$$\frac{x}{b} = \frac{h - y}{h}$$

de la cual sale el valor de x, que es una variable que tenemos que eliminar:

$$x = \frac{b\,(h - y)}{h}$$

Y reemplazando este valor en la expresión del momento elemental se tiene:

$$dM = \frac{b\,(h - y)}{h}\, y\, dy$$

$$= \frac{b}{h}\,(hy - y^2)\, dy$$

Y ahora integramos la diferencial del momento para obtener el momento completo de la figura:

$$M = \int_0^h dM = \int_0^h \frac{b}{h}\,(hy - y^2)\, dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[\frac{h\,y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{b}{h}\left[\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right]$$

$$M = \frac{b\,h^2}{6}$$

que resultó después de una simplificación algebraica elemental.

156. — Centro de gravedad

Una de las aplicaciones inmediatas del momento de primer orden de una figura plana es la de permitir definir el *baricentro* o centro de gravedad. Es un punto (figura 114) consi-

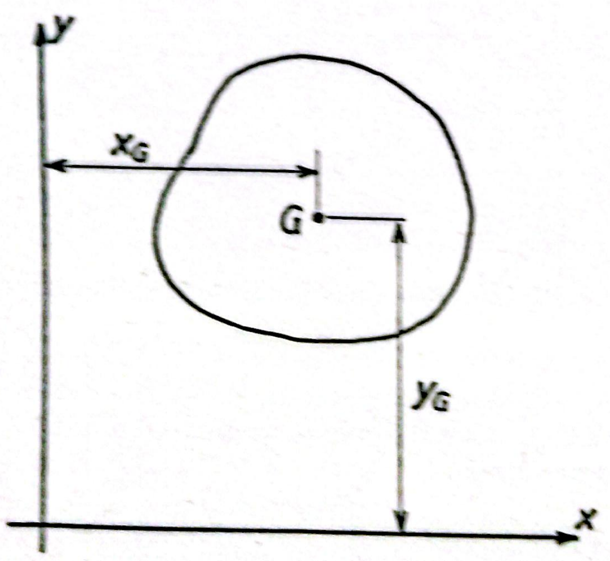


FIG. 114. – Baricentro o centro de gravedad de una figura plana.

derado como centro geométrico, para el cual el momento estático es nulo; también puede decirse que si suponemos concentrada toda la superficie en ese punto, el momento estático de la figura respecto de un eje cualquiera es igual a la superficie multiplicada por la distancia del baricentro al eje. De acuerdo con ello, si dividimos el momento estático de la

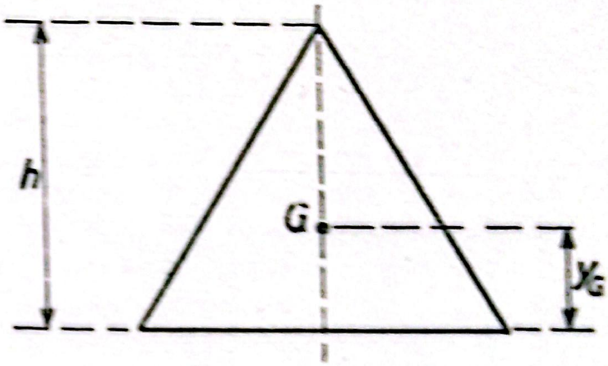


FIG. 115. – Baricentro de un triángulo isósceles.

figura por la superficie, obtenemos la distancia mencionada. Generalizando, si el baricentro de la figura es G, las coordenadas del mismo respecto al sistema de ejes se determinan con los cocientes entre los momentos estáticos respecto de cada eje y la superficie de la figura A. Es decir:

$$x_G = \frac{M_y}{A}$$

$$y_G = \frac{M_x}{A}$$

Como ejemplo de aplicación, determinemos la distancia desde la base al centro de gravedad de un triángulo isósceles, según lo indica la figura 115. El momento estático respecto de la base ya lo hemos calculado y vale:

$$M_x = \frac{b\,h^2}{6}$$

y el área del triángulo vale, según la Geometría:

$$A = \frac{b\,h}{2}$$

Luego, la ordenada del baricentro es el cociente entre ambos valores:

$$y_G = \frac{M_x}{A} = \frac{h}{3}$$

157. — Momento de inercia de una figura

Otro ejemplo interesante de aplicación del cálculo integral es el de la determinación del momento de inercia o *momento de segundo*

orden de una figura plana respecto de un eje, de vasta aplicación en la técnica. Por definición, el momento de inercia de una figura respecto de un eje es la sumatoria de los productos de los elementos de superficie por los cuadrados de las distancias al eje dado. Si to-

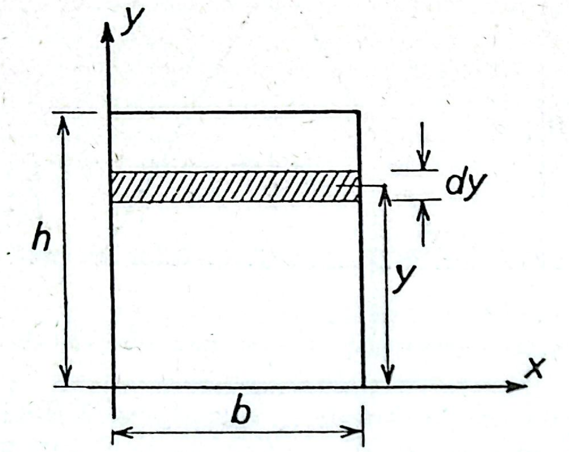


FIG. 116. — Momento de segundo orden o de inercia de un rectángulo respecto de la base.

mamos el caso particular de la figura 116, el momento de inercia elemental de la franja rayada es:

$$dJ = b\, dy\, y^2$$

donde la letra J representa el momento de inercia, y la variable y es la distancia del eje a la superficie elemental. Integrando la expresión diferencial anterior se obtiene el momento de inercia de toda la superficie.

Para el caso particular de un rectángulo, el momento de inercia referido a un eje que coincide con la base vale:

$$J = \int_0^h dJ = b \int_0^h y^2\, dy$$

$$= b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{b\, h^3}{3}$$

El valor final hallado es el momento de inercia de un rectángulo respecto de su base; similar procedimiento se emplea para hallar las fórmulas finales correspondientes a otras figuras, las que pueden encontrarse en los manuales técnicos.

158. — Media cuadrática de la senoide

No siempre las integrales que se deben resolver contienen diferenciales del tipo simple que hemos visto en los ejemplos anteriores. Un caso que nos servirá de ejemplo interesante es el que necesitan resolver los estudiantes de Electrotecnia para encontrar el valor eficaz de una magnitud senoidal. Tal valor es la altura media de una curva que es, punto a punto, el cuadrado de una senoide; para ver más claramente el caso observemos la figura 117 donde aparece una senoide, cuya ordenada máxima vale la unidad, positiva en la primera mitad de la curva y negativa en la segunda mitad. Si elevamos al cuadrado todas las ordenadas de la curva nos encontramos con la senoide cuadrática, con dos vientres positivos y ordenadas máximas que valen también la unidad; el problema es determinar la ordenada media Y de esta segunda curva.

El procedimiento indicado es hallar el área encerrada entre la curva y el eje de abscisas y luego dividir ese área por la base, resultando así la altura media. Y para encontrar el área tomamos franjas como la rayada, cuya área elemental es igual a la base, dx, por la altura que vale $\text{sen}^2 x$; los límites de integración los tomamos desde el origen hasta la mitad de la base por ser iguales las dos ramas. Como los ángulos los hemos tomado en radia-

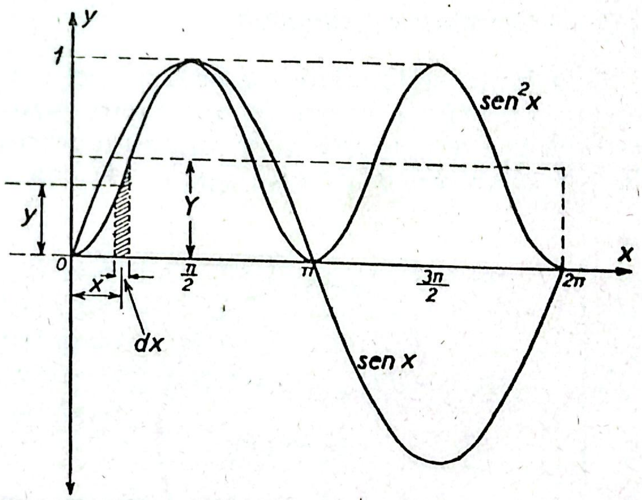


FIG. 117. — Determinación de la media cuadrática de una senoide.

nes, esa base no tiene el valor 180° sino π radianes. Determinemos primero el área de media curva:

$$S = \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx$$

Pero por Trigonometría, sección 84, podemos reemplazar el cuadrado del seno por la expresión:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

con lo que la integral queda así:

$$S = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \cos 2x \, dx \right)$$

y de la tabla de derivadas (sección 147), sacamos que la primitiva de la función coseno es el seno con signo negativo, de modo que la integración da:

$$S = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right]_0^\pi$$

y reemplazando los valores extremos de la variable independiente, tenemos:

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Y la altura media será igual al área de media curva dividida por la base de media curva, o sea:

$$Y = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$$

es decir la mitad de la ordenada máxima, tal como lo saben los que estudiaron Electrotecnia.

159. — Volumen de un sólido

Para destacar la importancia que tiene en la técnica el cálculo integral, daremos como ejemplo la determinación del volumen de un sólido, en este caso un paraboloide de revolución, según la figura 118. Determinaremos el volumen entre el vértice, que se ha hecho coincidir con el origen de coordenadas y un punto en el cual la abscisa toma el valor $x = a$.

Si dividimos al cuerpo en rodajas, las que tienen el aspecto de fichas planas, el volumen de cada rodaja o volumen elemental vale:

$$dv = S_x \, dx$$

siendo S_x la superficie de un círculo cuyo radío es la ordenada y, la cual está ligada a la abscisa o variable independiente por la ecuación de la parábola:

$$y^2 = 2px$$

Luego, poniendo el área del círculo en la expresión del volumen elemental, se tiene:

$$dv = \pi y^2 \, dx$$
$$= \pi \, 2px \, dx$$

Y ahora no hay más que integrar el volu-

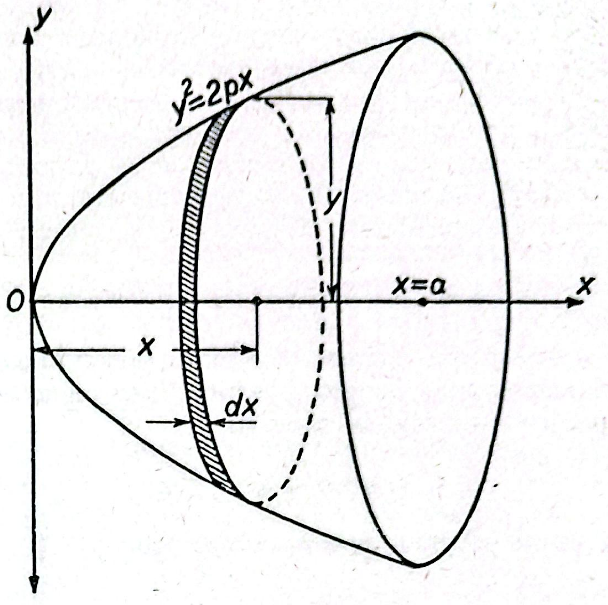


FIG. 118. — Determinación del volumen de un paraboloide.

men diferencial para obtener el volumen del cuerpo entre los límites fijados:

$$V = \int_0^a 2\pi p x \, dx$$

$$= \left[2\pi p \frac{x^2}{2} \right]_0^a$$

$$= \pi p a^2$$

es decir que el volumen está dado en función de cantidades conocidas.

160. — Integración por sustitución

Si recordamos las explicaciones dadas para las derivadas de función de función (sección 149), en las cuales la función de la variable no aparece directamente sino a través de otra función, podemos encontrar un método que nos ayude a resolver algunas integrales que encontraremos en la práctica. En efecto, recordemos que si la función era del tipo:

$$y = f[F(x)]$$

en la cual se tiene:

$$y = f(z)$$
$$z = F(x)$$

La derivada de la función de función era:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$$

Luego podemos decir que si encontramos una diferencial que debemos integrar, y que está compuesta por el producto de una función de función por la derivada de la segunda función, la primitiva o sea el resultado de la integración será la primitiva de la primera función, considerando a la segunda como variable independiente. O sea que la integral:

$$\int y' z' \, dx = \int f'(z) F'(x) \, dx = f[F(x)] + C$$

Expresión que aparece como complicada si no ponemos un ejemplo práctico. Supongamos que encontramos la integral:

$$\int m a (ax + b)^{m-1} \, dx$$

y como sabemos que se cumple que:

$$\frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

y que también se cumple que:

$$\frac{d}{d(ax + b)}(ax + b)^m = m(ax + b)^{m-1}$$

podemos deducir de inmediato el resultado de la integral anterior mediante el método de sustitución antes descripto:

$$\int m a (ax + b)^{m-1} \, dx = (ax + b)^m + C$$

La integración por sustitución permite resolver numerosos problemas en la técnica, y la mención que se ha hecho sirve de advertencia al lector, ya que no es nuestro objetivo el profundizar este tema sino justificar algunas deducciones que se encontrarán en los libros técnicos. Generalmente esas deducciones están aclaradas, y entonces lo explicado sirve como modelo para que se pueda entender y admitir el caso que se encuentre.

161. — Derivada segunda de una función

Así como de cualquier función matemática puede calcularse la derivada, de ésta, que es otra función de la variable distinta a la primera, también se puede determinar la derivada de la segunda función; luego, a la derivada de la derivada de una función se la llama *derivada segunda*. Si una función dada es:

$$y = f(x)$$

la derivada que hemos estudiado, también llamada derivada primera, es:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Y encontramos una segunda expresión matemática que contiene a la variable independiente x; si ahora calculamos la derivada de esa segunda expresión, lo escribimos así:

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{d x^2}$$

La última forma a escribir la derivada segunda debe entenderse como una expresión matemática y no como una operación algebraica. Por ejemplo, si se tiene la función: $y = 4x^5$ la derivada primera vale: $y' = 20x^4$ y la derivada segunda se calcula de idéntica manera:

$$y'' = 80x^3$$

Otro ejemplo, si la función es: $y = \text{sen}\, x$ la derivada primera vale, según la tabla conocida (sección 147): $y' = \cos x$ y la derivada segunda, según la misma tabla, ya que tenemos que determinar la derivada de la derivada anterior, vale:

$$y'' = -\text{sen}\, x$$

El estudio de la derivada segunda tiene importancia en la explicación del tema que sigue, o sea el de la determinación de los máximos o mínimos de las funciones, por cuya razón lo hemos mencionado.

162. — Máximos y mínimos

Es muy frecuente en la técnica que se desee determinar el valor máximo o el valor mínimo de una función. Para comprender el procedimiento a emplear, observemos la figura 119, que nos muestra una curva cualquiera, representación gráfica de una función matemática. Se nota que en los puntos de máxima y de mínima ordenada, como el A y el B, la tangente en tales puntos es horizontal. Luego, el ángulo de esas tangentes es nulo y por consiguiente lo será la tangente trigonométrica del mismo.

Ya tenemos una importante conclusión: cuando la derivada primera de una función para un punto determinado se hace igual a cero, ese punto es un máximo o un mínimo. Falta determinar cuál de las dos cosas es cierta.

Primero estudiemos el caso de los *máximos*, que se ilustra en la figura 120. La función $f(x)$ que se ha representado gráficamente tiene un máximo en el punto A. Si calculamos la derivada de esa función para distintos puntos, podemos representar gráficamente los valores de las derivadas y tendremos otra curva, la $f'(x)$, la cual debe forzosamente pasar por

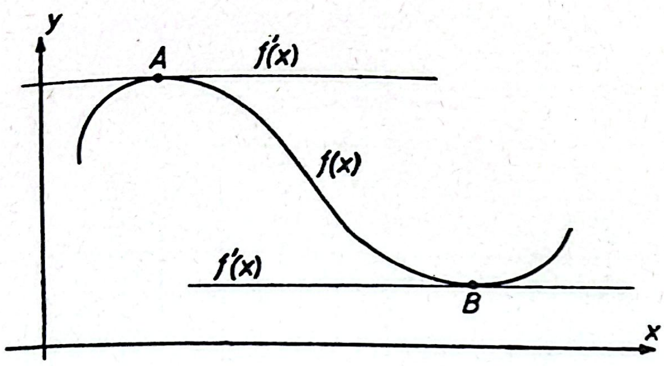


FIG. 119. — En los puntos máximos o mínimos la derivada primera es nula.

el eje de abscisas para la abscisa de A, ya que la derivada en A es nula. Es decir que la curva que nos representa las derivadas de la función primitiva dada pasa por el punto B sobre el eje horizontal. Calculemos la derivada segunda de esta segunda función $f'(x)$ para el punto B.

Por lo pronto, se comprende de inmediato que si incrementamos la función a partir de A, esos incrementos serán cantidades negativas ya que la ordenada en el punto A, es máxima y al salir de él, se reduce. Luego la derivada primera, para los puntos desde A hacia la derecha debe tener valores negativos y entonces la tangente geométrica en B es una recta que forma con el eje horizontal un ángulo negativo. Y como la tangente geométrica en B tiene por pendiente al valor de la derivada segunda, ésta debe ser negativa, lo cual puede escribirse matemáticamente como una cantidad menor que cero; o sea que cuando hay un máximo en la función, se cumple que: $f'(x) = 0$ $\qquad f''(x) < 0$

Similares consideraciones nos llevan a la figura 121, que estudia el caso de los puntos de ordenada mínima de una función, o sea sus *mínimos*. Los incrementos de la función,

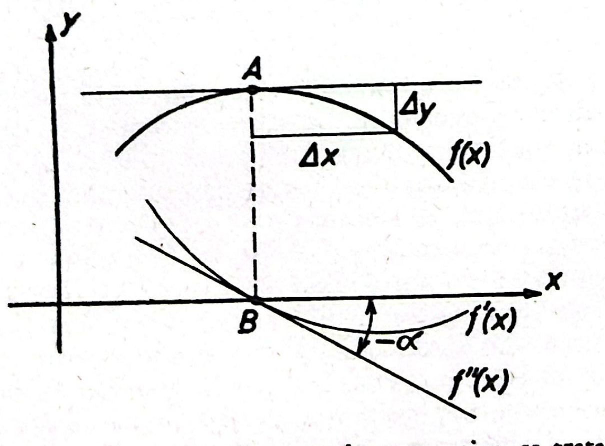


FIG. 120. — Si la derivada segunda es negativa, se trata de un máximo.

a partir de A son positivos, luego la derivada de la función para puntos hacia la derecha de A debe ser siempre positiva. La tangente geométrica en el punto B, que corresponde a derivada primera nula, pues hay un mínimo en la función $f(x)$, forma un ángulo positivo y la tangente trigonométrica de ese ángulo, que es el valor de la derivada segunda, es una cantidad positiva. Luego, para los puntos en los cuales la función pasa por un mínimo se cumplen las dos condiciones:

$$f'(x) = 0 \qquad f''(x) > 0$$

Lo que antecede nos explica claramente el

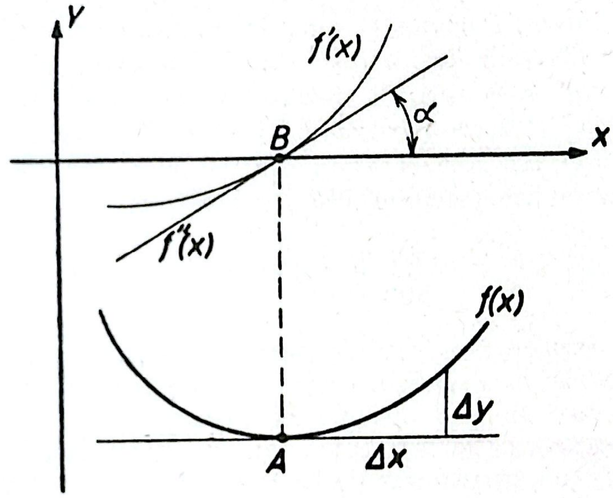


FIG. 121. — Si la derivada segunda es positiva, se trata de un mínimo.

método para encontrar el valor máximo o mínimo de una función; primero hallamos la derivada primera y la igualamos a cero; el valor de la variable obtenido es aquél que produce un máximo o un mínimo. Si para ese valor hallamos la derivada segunda y nos da una cantidad positiva, se trata de un mínimo; si da negativo, es un máximo.

Ejemplo: Deseamos determinar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una elipse, según se plantea en la figura 122. Tomamos los ejes coordenados coincidentes con los de la elipse, para simplificar el problema. El área del rectángulo indicado vale:

$$S = 4\,x\,y$$

y las coordenadas están vinculadas entre sí por la ecuación de la elipse (sección 136):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de la cual podemos deducir el valor de la or-

denada en función de la abscisa mediante un simple desarrollo algebraico:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

y de aquí sale fácilmente:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Valor que reemplazado en la fórmula que da el área del rectángulo nos da:

$$S = \frac{4\,b}{a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ahora tenemos la función; hay que calcular la derivada primera e igualarla a cero, y el valor de la variable que resulta es la que produce el área máxima. Para hacer la derivada obsérvese que se trata del producto de dos funciones (sección 146), o sea que:

$$\frac{dS}{dx} = u\,v' + u'\,v$$

Procedamos metódicamente y dejemos fuera de la derivación el coeficiente o factor constante que aparece al principio, ya que después de la derivación quedará igual. Ahora veamos los valores de las derivadas de las dos funciones que tenemos:

La primera, a la que hemos denominado u es simplemente la x que está como factor de la raíz cuadrada; su derivada es la unidad, de modo que: $u' = 1$

La segunda función es la que corresponde a la raíz cuadrada, y por consiguiente es una función de función; su derivación ha sido explicada anteriormente (sección 149), y se resuelve así:

$$v' = \frac{d}{dx}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{d}{d\,(a^2 - x^2)}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)\frac{d}{dx}\,(a^2 - x^2)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\,2\,x$$

Y ahora reemplazamos las dos derivadas en la expresión de la derivada de la superficie, y se tiene:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{4\,b}{a}\left[\frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2}\right]$$

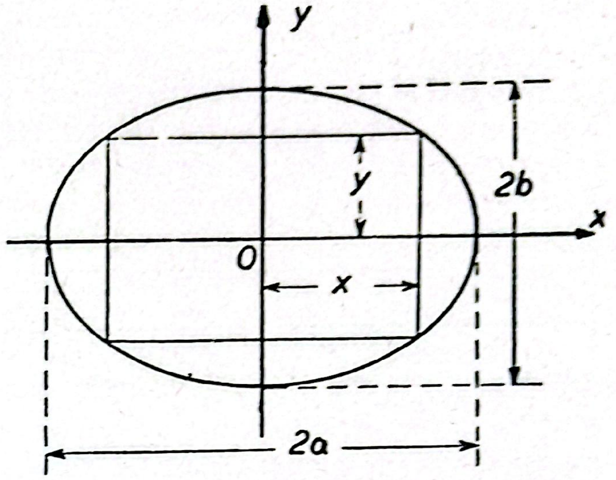


FIG. 122. – Rectángulo de área máxima inscripto en una elipse.

Ahora bien, por estar buscando un máximo, debemos igualar a cero la derivada primera encontrada; de inmediato, pasamos el término negativo al otro miembro y nos queda:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Y pasando la raíz al primer miembro multiplica a la otra raíz y se anula el radical, quedándonos:

$$a^2 = 2\,x^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Hemos llegado a obtener el valor de la abscisa que nos da la mitad de la base del rectángulo de área máxima. La ordenada que da la mitad de la altura de ese rectángulo la encontramos con la expresión de la función y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Y estaría terminado el problema si no pensáramos que no se ha verificado si se trata de un máximo o de un mínimo el valor del área de ese rectángulo. Aunque intuitivamente sabemos que es un máximo, se puede verificar esto encontrando el valor de la derivada segunda y comprobando si es negativo. Pero, el área mínima se produce cuando a o b valen cero, de modo que el rectángulo encontrado es el máximo. Para los que gustan de la ejercitación, los invitamos a encontrar el valor de la derivada segunda y comprobarán que es negativa.

INDICE GENERAL

PÁG.

Día 1

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LA ARITMETICA 3

1. Clasificación de cantidades 4
2. Operaciones fundamentales 4
3. Operaciones con números decimales ... 5
4. Operaciones accesorias importantes 7
5. Extracción de la raíz cuadrada 8
6. Operaciones con quebrados 9

Día 2

ESTUDIOS ADICIONALES DE ARITMETICA .. 14

7. Partes proporcionales 14
8. Razones o relaciones 15
9. Proporciones 15
10. Porciento 17
11. Por mil 17
12. Relación de eficiencia 18
13. Magnitudes proporcionales 18
14. Regla de tres simple 18
15. Regla de tres compuesta 19
16. Progresiones aritméticas 20
17. Progresiones geométricas 21
18. Interés compuesto 21
19. Imposición o capitalización 22

Día 3

OPERACIONES FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA 23

20. Cantidades positivas y negativas 24
21. Desigualdades 26
22. Operaciones fundamentales 26
23. Suma o adición 26
24. Resta o sustracción 27
25. Producto o multiplicación 27
26. Cociente o división 29
27. Potenciación 30
28. Radicación 31
29. Propiedades de los exponentes 31

Día 4

ESTUDIOS ADICIONALES DE ALGEBRA 33

30. Uso del paréntesis 33
31. Factor común 34
32. Simplificación algebraica 35
33. Polinomios algebraicos 35
34. Operaciones con monomios 36
35. Operaciones con binomios 36
36. Cuadrado de binomios 36
37. Diferencia de cuadrados 37
38. Operaciones con polinomios 37
39. Ecuaciones algebraicas 39
40. Resolución de ecuaciones 39
41. Reglas de resolución 41

Día 5

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA 42

42. Unidades de longitud 42
43. Medidas de superficie 43
44. Medidas de volumen 44
45. Medidas de capacidad y peso 45
46. Peso específico 45
47. Estudio de las figuras planas 45
48. Angulos 46
49. Figuras geométricas planas 46
50. Superficie de las figuras planas 46
51. Areas y volúmenes de los cuerpos sólidos 50

Día 6

ESTUDIOS ADICIONALES DE GEOMETRIA . 55

52. Estudio de los ángulos 55
53. Medida de los ángulos 56
54. Definiciones sobre ángulos 57
55. Igualdad de ángulos 58
56. Estudios sobre triángulos 59
57. Igualdad de triángulos 61
58. Semejanza de triángulos 62
59. Representaciones gráficas 63

Día 7

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO 65

60. Sistemas de ecuaciones 66
61. Arreglo de las ecuaciones 66
62. Resolución de los sistemas. Método de sustitución 67
63. Método de igualación 69
64. Sistemas de más de dos incógnitas 69
65. Resolución por determinantes 70

Día 8

OPERACIONES CON LOGARITMOS 72

66. Definición de logaritmos 72
67. Cuestiones fundamentales 73
68. Equivalencia entre los sistemas 73
69. Tabla de logaritmos 73
70. Características negativas 74
71. Búsqueda en la tabla 74
72. Uso de la tabla de doble entrada 74

PÁG.

73. Operaciones con logaritmos. Logaritmo del producto 77
74. Logaritmo del cociente 78
75. Cologaritmo 79
76. Logaritmo de potencias 79
77. Logaritmo de raíces 80

Día 9

ESTUDIOS DE TRIGONOMETRIA 82
78. Funciones circulares 82
79. Relaciones entre funciones circulares 83
80. Trigonometría 85
81. Teorema de Pitágoras 86
82. Resolución de triángulos rectángulos 87
83. Resolución de triángulos oblicuángulos 89
84. Otras expresiones de interés 90
85. Representación gráfica de funciones circulares 92

Día 10

CALCULADORAS ELECTRONICAS 93
86. Tipos de calculadoras 93
87. Visores luminosos 95
88. Memoria o registro 95
89. Métodos operativos 96
90. Esquema para suma y resta 96
91. Esquema para multiplicación y división 97
92. Esquema para potencias y raices 97
93. Operaciones con constante 98
94. Esquema con uso de memoria 98
95. Resolución de fórmulas 99
96. Operaciones financieras 99
97. Calculadoras científicas 100

Día 11

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS 102
98. Números imaginarios 102
99. Operaciones con números imaginarios 103
100. Números complejos 104
101. Representación vectorial 105
102. Complejos conjugados 105
103. Operaciones con complejos 106
104. Suma y resta de complejos 106
105. Suma vectorial de complejos 107
106. Resta vectorial de complejos 108
107. Complejos multiplicados o divididos por un número real 109
108. Producto de complejos 109
109. División de complejos 110
110. Representación polar de complejos 111
111. Uso de radianes 112
112. Notación vectorial 112

Día 12

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 113
113. Solución cuando no hay término lineal 114
114. Solución cuando no hay término independiente 115

PÁG.

115. Solución para la forma completa reducida 115
116. Solución para la forma completa general 117
117. Caso de soluciones complejas 118
118. Reconstrucción de la ecuación 119
119. Formas no comunes de la ecuación 119

Día 13

GEOMETRIA ANALITICA 120
120. Concepto de función 121
121. Representación de funciones 121
122. Familias de características 121
123. Desplazamiento de los ejes 122
124. Representación y ecuación de la línea recta 124
125. Representación de la recta mediante las coordenadas al origen 126
126. Distancia entre dos puntos 126
127. Intersección de rectas 127
128. Rectas paralelas y perpendiculares 128
129. Distancia de un punto a una recta 129
130. Recta que pasa por un punto 130
131. Recta que pasa por dos puntos 130
132. Las cónicas 131
133. Ecuación de la circunferencia 132
134. Intersección entre recta y circunferencia 133
135. Tangente a una circunferencia 133
136. Ecuación de la elipse 134
137. Ecuación de la hipérbola 135
138. Hipérbola equilátera 136
139. Ecuación de la parábola 137
140. Gráficos logarítmicos 138

Día 14

CALCULO INFINITESIMAL - A) CALCULO DIFERENCIAL 140
141. Concepto de límite 141
142. Determinación del límite 141
143. Concepto gráfico del límite 142
144. Concepto de incremento 143
145. Concepto de derivada 144
146. Cálculo de la derivada 144
147. Tabla de derivadas resueltas 145
148. Ejemplo práctico de derivadas 146
149. Derivada de una función de función 147
150. Concepto de diferencial 148

Día 15

CALCULO INFINITESIMAL - B) CALCULO INTEGRAL 149
151. Concepto de integración 149
152. Cálculo de la integral indefinida 150
153. Cálculo de la integral definida 150
154. Area limitada por una curva 151
155. Momento estático de una superficie 152
156. Centro de gravedad 153
157. Momento de inercia de una figura 153
158. Media cuadrática de una senoide 154
159. Volumen de un sólido 155
160. Integración por sustitución 155
161. Derivada segunda de una función 156
162. Máximos y mínimos 156

LA MAS MODERNA COLECCION DE LIBROS TECNICOS
SIMPLIFICADOS AL ALCANCE DE TODOS

por CHRISTIAN GELLERT *con la dirección técnica del* ING. FRANCISCO L. SINGER

APRENDA ELECTRICIDAD EN 15 DIAS
Conocimientos básicos de la Electricidad para aprender Radio y Televisión.

APRENDA ELECTROTECNICA EN 15 DIAS
Una descripción práctica de aparatos, motores, generadores e instalaciones eléctricas.

APRENDA RADIO EN 15 DIAS
Este libro lo guiará en la teoría y el armado de un receptor modelo.

APRENDA SERVICE DE RADIO EN 15 DIAS
Paso a paso aprenderá a revisar, reparar y calibrar todos los radio-receptores.

APRENDA TELEVISION EN 15 DIAS
Describe un aparato de televisión al mismo tiempo que le enseña a construirlo.

APRENDA SERVICE DE TV EN 15 DIAS
Cuadros prácticos y una guía para todos los que se dedican a reparar televisores.

APRENDA TV-TRANSISTOR EN 15 DIAS
Explica la teoría y la práctica del televisor transistorizado.

APRENDA HI-FI Y ESTEREO EN 15 DIAS
Toda la amplificación del sonido con circuitos, tablas, gabinetes y ambientación.

APRENDA GRABADORES EN 15 DIAS
Teoría, funcionamiento, uso y reparaciones de los grabadores a cinta magnética.

APRENDA FM Y MULTIPLEX EN 15 DIAS
Para escuchar estereofonía por radio con la más alta fidelidad conocida.

APRENDA VALVULAS Y TUBOS EN 15 DIAS
Teoría, funcionamiento y reemplazos de las válvulas y tubos de imagen.

APRENDA TRANSISTORES EN 15 DIAS
Teoría y práctica de los semiconductores con circuitos y datos para el uso.

APRENDA SERVICE-TRANSISTOR EN 15 DIAS
Revisión y reparación de toda clase de equipos transistorizados.

APRENDA MOTORES EN 15 DIAS
Todos los motores a vapor, a explosión y diesel explicados en teoría y práctica.

APRENDA MATEMATICAS EN 15 DIAS
Para manejar números y letras, realizar cálculos y entender fórmulas técnicas.

APRENDA ELECTRONICA EN 15 DIAS
Modernas aplicaciones de esta ciencia en la industria, el automotor y la vivienda.

APRENDA INSTRUMENTAL EN 15 DIAS
Los aparatos más usados en Radio y TV con sus circuitos y explicaciones.

APRENDA TRANSMISION EN 15 DIAS
Para armar, ajustar y usar receptores y transmisores de aficionados.

APRENDA FISICA EN 15 DIAS
Todos los fenómenos que se operan en los cuerpos y leyes que los rigen.

APRENDA TV-COLOR EN 15 DIAS
Teoría, circuitos, armado, calibración y revisión de fallas de televisores de color sistema PAL-N. Adaptación de aparatos de otras normas.

APRENDA PROGRAMACION EN 15 DIAS
Se dan las nociones básicas para aprender a manejar una computadora, siguiendo paso a paso las etapas programadas.